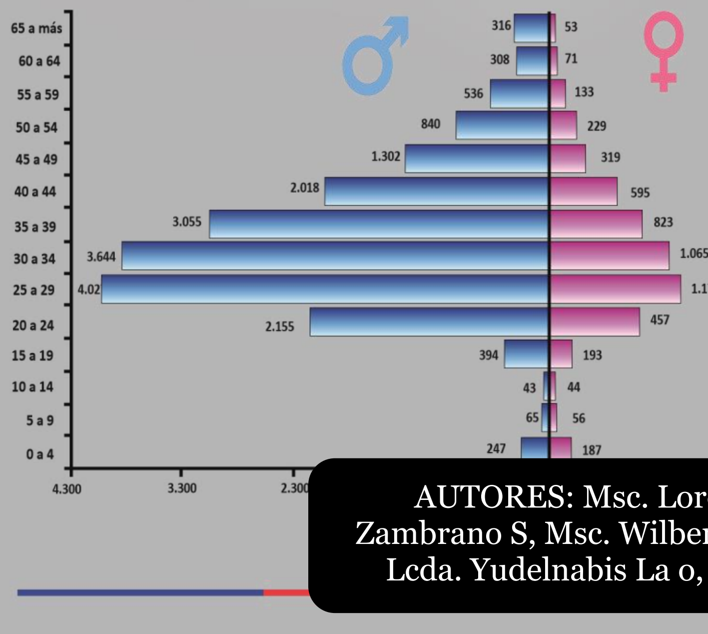
ENFOQUE DIDÁCTICO DE LA TEORIA DE CONJUNTOS Y PROBABILIDADES

$$C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$P(x) = \frac{\lambda^x \, x \, e^{-\lambda}}{x!}$$

$$F(x) = \begin{cases} 1-e^{-\lambda}, & x>0 \\ 0, & x\leq 0 \end{cases}$$



AUTORES: Msc. Lorenzo Cevallos T, Msc. Jorge Zambrano S, Msc. Wilbert Ortiz A, PhD. Maikel Leyva V, Lcda. Yudelnabis La o, PhD. Florentin Smarandache

Revisores del libro:

Dr. C. Neilys González Benítez Centro de investigación Meteorológica Pinar del Rio Cuba Correo Electrónico: nelysgonzalezbenitez@gmail.com

Dr. C. Karina Pérez Teruel Universidad abierta para adultos Santiago de los caballeros Republica Dominicana Correo Electrónico: karinapt@gmail.com

Dr. C. Rafael Alejandro Espín Andrade Autonomous University of Coahuila México.

Pons Publishing House / Pons asbl Quai du Batelage

5 1000 – Bruxelles, Belgium; DTP: George Lukacs

Publicado con el Co-auspicio de la

Asociación Latinoamericana de Ciencias Neutrosóficas
Facultad de Ciencias Matemáticas y Físicas
Universidad de Guayaquil
Cdla. Salvador Allende
Av. Delta y Av. Kennedy
Guayaquil, Guayas, Ecuador

ISBN: 978-1-59973-593-1

ISBN 978-1-59973-593-1

9 781599 735931 >

TABLA DE CONTENIDO.

Capítulo 1
Teoría de conjuntos.

CAPITULO 1

TEORIA DE CONJUNTOS

Introducción.

En el desarrollo de este capítulo vamos a definir ciertos conceptos principales de la teoría de conjuntos, los cuales son primordiales para la comprensión de este tema.

La teoría de conjuntos es una rama de las matemáticas, y cuya dedicación de este capítulo, es gracias al matemático, Ferdinand Ludwing Philipp Cantor, quien es considerado el padre de la Teoría de Conjuntos, debido a ello, es que, en el año 1874, salió su primer trabajo revolucionario, con respecto a la teoría de conjuntos.

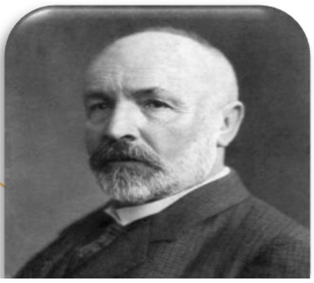


Ilustración 1:Ferdinand Philipp Cantor – Matemático

En conclusión, el objetivo de este capítulo es utilizar un lenguaje simbólico a partir de un lenguaje común, con la finalidad de efectuar las distintas operaciones entre los conjuntos, y de esta manera ayudar a la comprensión del tema.

Contenido.

- Teoría de conjuntos.
- Conjuntos objetivos.
- Definición de conjuntos.
- Descripción de un conjunto.
- Cardinalidad de un conjunto.
- Conjuntos relevantes y su clasificación.
- Cuantificadores.
- Subconjunto.
- Conjunto potencia.
- Igualdad entre conjuntos.
- Conjuntos disjuntos e intersecantes.
- Operaciones entre conjuntos.
- Propiedades de las operaciones entre conjuntos.
- Cardinalidad de conjuntos por diagramas de venn.

1. Teoría de conjuntos.

1.Definición.

- Conjuntos se refiere a agrupar personas, animales, plantas, cosas o simplemente elementos que existen en el universo, para poder analizar relaciones que puedan existir entre ellos.

Ilustración 2: Ferdinand Cantor

Dado otros conceptos, referentes a la teoria de conjuntos, Ivorra indica que "Un conjunto es una rama más de la lógica matemática que estudia propiedades y relaciones de los conjuntos. Los conjuntos y sus operaciones más relevantes, son una herramienta importante en la formulación de teorías matemática." (Ivorra & Carlos, 2010)

1.1. Conjuntos objetivos.

1.Definición.

- Su objetivo es simplemente la representación de varios elementos de manera gráfica y entendible.

Como indica Espinosa,"Comprender las relaciones que hay dentro de un conjunto, ya que es la selección de elementos que cumplen alguna característica en común, determinada previamente." (Espinosa D. J., (2009))

Por otro lado los autores Ivorra y Carlos, dan a Entender que un conjunto es un "muchos" que puede ser pensado como uno. (Ivorra & Carlos, 2010)

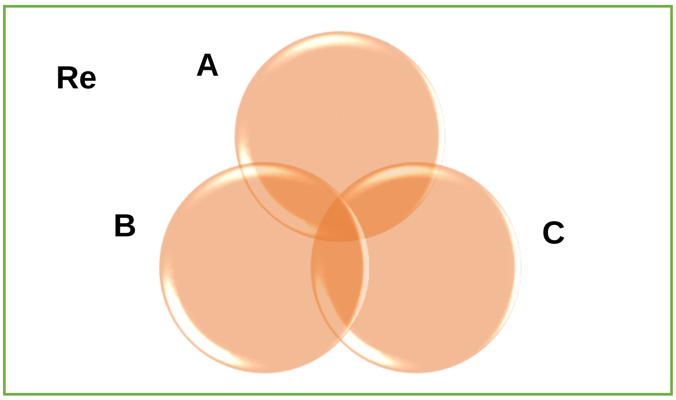


Ilustración 3: Representación de 2 conjuntos interceptados.

1.2. Conjuntos.

1.Definición.

- Un conjunto es una agrupación de elementos. Un elemento pertenece al conjunto si este se encuentra incluido dentro de él. Un conjunto puede ser infinito, finito, vacío o unitario, todo dependiendo de los elementos que se encuentren dentro de él y se lo representa con una letra mayúscula "A,B,C...", seguido por llaves {...}. Ejemplo de un conjunto de vocales: $A = \{a, e, i, o, u\}$

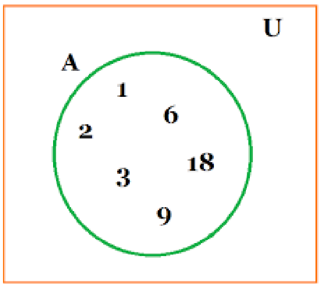


Ilustración 4: Conjunto de números

Se han escrito muchos conceptos relacionados con conjuntos, es asi que Culquichicón, aporta con su conocimiento indicando que: “Conjunto se define como la presencia o ausencia de elementos con características semejantes dentro de un contexto real o imaginario" (Culquichicón, 2010)

(Espinosa D. J., 2009) indica que: “Un conjunto es una recopilación de elementos específicos de manera que se puede aseverar si un elemento dado pertenece o no a la agrupación. La representaciónes por letras mayúsculas. Cuando un elemento x pertenece a un conjunto b se enuncia: x ∈ b, en caso de que no pertenezca se denota: x ∉ a.”

1.3. Descripción de un conjunto.

1.Definición.

- Los conjuntos se definen habitualmente usando llaves “{… }” y estos pueden ser descritos de distintas formas como se las mencionará a continuación. Se pueden describir por: extensión o tabulación, comprensión y por diagrama de venn.

1.3.1. Descripción de un conjunto por extensión o tabulación.

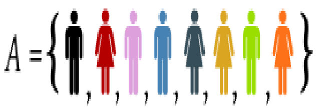


Ilustración 5: Conjunto de un grupo de personas.

Definición.

- Se conoce como descripción por extensión al describir los elementos de un conjunto uno a uno. Si un conjunto llega a tener varios elementos se puede hacer uso de los puntos suspensivos. Un ejemplo claro pueden ser el conjunto de los números pares. $A = \{2,4,6,8, \dots\}$

“Un conjunto se determina por extensión cuando se mencionan uno por uno todos sus elementos o cuando, si son números, se mencionan los primeros de ellos (y se coloca puntos suspensivos).” (Culquichicón, 2010)

1.3.1.1. Ejemplos.

- ***Ejemplo 1.***
  Sea A el conjunto de partes que conforman una computadora.

  1. Descripción.
     El conjunto A está conformado por partes de una computadora: mouse, teclado, monitor, CPU, Impresora

  2. Notación matemática.

  $A = \{Mouse, Teclado, Monitor, CPU, Impresora\}$

Ilustración 6:Hardware de un computador – (Ejemplo 1)

- ***Ejemplo 2***.
  Sea B el conjunto de ingenierías que hay en la facultad “CISC” de la Universidad Guayaquil.

  1. Descripción.
     El conjunto B está conformado por carreras que hay en la facultad “CISC”: Ingeniería en sistemas, ingeniería en networking

Ilustración 7: Ingeniería – (Ejemplo 2)

  2. Notación matemática.

  $B = \{Ingeniería\ en\ Sistemas\ Computacionales, Ingeniería\ en\ Networking\}$

- ***Ejemplo 3***.
  Sea C el conjunto de lenguajes de programación.

  1. Descripción.

  El conjunto C está conformado por lenguajes de programación: Python, C#, C, …

2. Notación matemática.

$$C = \{Python, C, C\#, \dots\}$$

Ilustración 8: Lenguaje de programación Python – (Ejemplo 3)

- ***Ejemplo 4:***

  Definamos B como el conjunto conformado por los colores del arco iris.

$$B = \{verde, zual, rojo, naranja, viloleta\}$$

Ilustración 9: Arco iris (Ejemplo 4)

- ***Ejemplo 5:***

  Se realizó una encuesta a un determinado número de estudiantes universitarios, para saber su opinión referente al error más común que se realiza durante un sismo, de acuerdo a los resultados obtenidos, alunos indicaron que corren, gritan o se esconden. Represente estas tres alternativas en un conjunto.

$$A = \{correr, gritar, esconderse\}$$

1.3.2. Descripción de un conjunto por compresión.

Definición.

- Se conoce como descripción por comprensión al mencionar simplemente una sola característica que tengan todos los elementos deseados en común.. Un ejemplo claro pueden ser el conjunto de los números pares. $A = \{x/x \text{ es número par}\}$

1.3.2.1. Ejemplos.

➢ ***Ejemplo 1.***

Sea A el conjunto de nombre de ingenieros que hay en la facultad “CISC” de la Universidad Guayaquil.

1. Descripción.
   Sea A el conjunto de los elementos de x tales que x es estudiante de la facultad CISC

2. Notación matemática.

$A = \{x/x\ es\ estudiante\ de\ \ ingeniería\}$

Ilustración 10: Ingeniero – (Ejemplo 1)

➢ ***Ejemplo 2.***

Sea B el conjunto de nombre de carreras que hay en la facultad “CISC” de la Universidad Guayaquil.

1. Descripción.
   Sea B el conjunto de los elementos de x tales que x es carrera de la facultad CISC

2. Notación matemática.

$B = \{x/x\ es\ Carreras\ de\ la\ Facultad\ de\ Ciencias\ MatemÁticas\ y\ Fisica\}$

Ilustración 11: Carreras de la facultad de matemáticas – (Ejemplo 2)

➢ ***Ejemplo 3.***

Sea C el conjunto de nombres de lenguajes de programación.

1. Descripción.
   Sea C el conjunto de los elementos de x tales que x es lenguaje de programación.

2. Notación matemática.

$C = \{x/x\ es\ un\ lenguaje\ de\ programación\}$

Ilustración 12: Programación – (Ejemplo 3)

- ***Ejemplo 4:***

El conjunto A está compuesto por todos los números naturales mayores que 5.

1. Descripción.
   Sea A el conjunto de los elementos de x tales que x son los números naturales mayores que 5.

2. Notación matemática.

$$\mathrm{A} = \{x/x \in \mathbb{N}/\ x > 5\}$$

- ***Ejemplo 5:***

El conjunto B está compuesto por todas las vocales.

1. Descripción.

Sea A el conjunto de los elementos de x tales que x son todas las vocales.

2. Notación matemática.

$$\mathrm{B} = \{\ x/x\ \text{ es una vocal}\ \}$$

1.3.3. Descripción de un conjunto por diagrama de Venn.

Definición.

- Un diagrama de Venn sirve para poder representar gráficamente la agrupación de elementos que tienen alguna característica en común y hacer sencilla su interpretación. Se lo representa con una letra mayúscula seguido por un círculo en el cual en su interior se encuentran los elementos del conjunto.

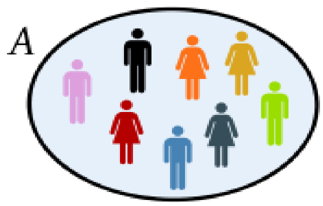


Ilustración 13: Diagrama de venn de un conjunto de personas

"Los diagramas de Venn son bosquejos utilizados en la teoría de conjuntos. Estos diagramas muestran conjuntos de elementos a través de líneas cerradas. La línea cerrada externa abarca todos los elementos bajo consideración del conjunto universal." (Zalta & Nodelman, 2013)

"Un diagrama de Euler Venn tiene el fin de representar clases de elementos, que tienen algo en común." (Rodriguez, 2010)

1.3.3.1. Ejemplos.

- ***Ejemplo 1.***

Sea A el conjunto de partes que conforman una computadora.

1. Descripción
   El conjunto A está conformado por partes de una computadora: mouse, teclado, monitor, CPU, Impresora

2. Notación matemática.
   $A = \{Mouse, Teclado, Monitor, CPU, Impresora\}$

3. Gráfica.

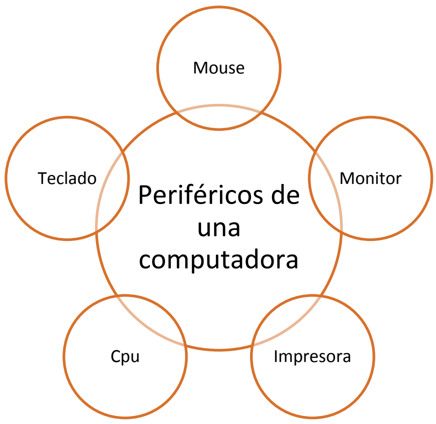


Ilustración 14: Periféricos de una computadora – (Ejemplo 1)

- ***Ejemplo 2***.

Sea B el conjunto de nombres de lenguajes de programación.

1. Descripción.
   El conjunto C está conformado por nombres de lenguajes de programación: Python, C#, C, …

2. Notación matemática.
   $$B = \{x/x\ es\ lenguajes\ de\ programación\ \}$$

3. Gráfica.

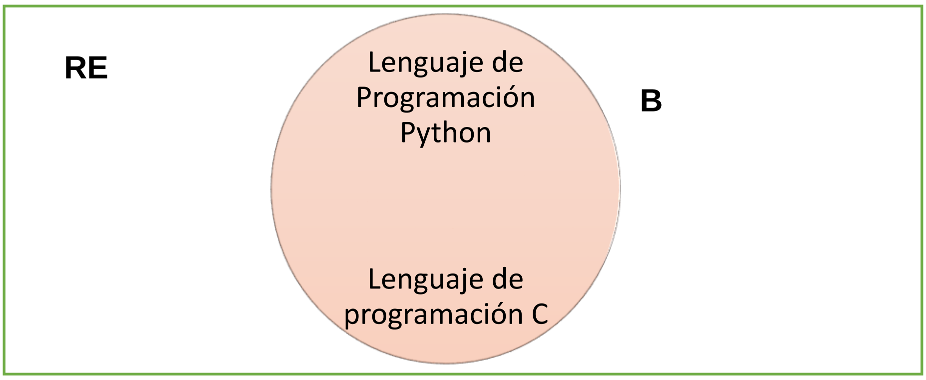


Ilustración 15: Diagrama de Venn de lenguajes de programación – (Ejemplo 2).

- ***Ejemplo 3***.

Sea C el conjunto de materias de tercer semestre de la carrera de ingeniería en sistemas.

1. Descripción.
   El conjunto C está conformado por nombres de materias que se ven en el tercer semestre de la carrera de ingeniería en sistemas: Programación III, matemáticas III, Probabilidad, contabilidad.

2. Notación matemática.

$C = \{x/x\ es\ materia\ de\ 3er\ semestre\ de\ ingeniería\ en\ sistemas\}$

Ilustración 16: Materias de ingeniería en sistemas – (Ejemplo 3)

- ***Ejemplo 4.***

Sean los conjuntos A y B formados por los colores.

1. Descripción.
   Representar los siguientes conjuntos:
   A= {verde, azul, café} y B= {morado, azul, amarillo}.

2. Notación matemática.

$A = \{x/x \ es \ un \ color \}$ y $B = \{x/x \ es \ un \ color \}$

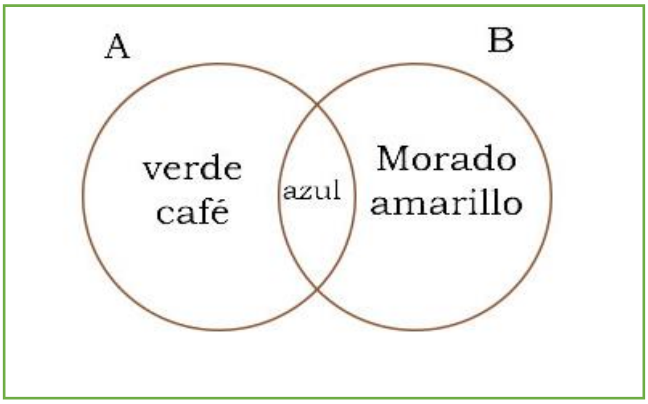


Ilustración16: colores

- ***Ejemplo 5.***

- Descripción.
  Representar los siguientes conjuntos:
  C= {1, 3, 4, 5, 7, 9}, D= {4, 6, 8, 9}.

- Notación matemática.
  $C = \{x/x \ es \ un \ numero\}, D = \{x/x \ es \ un \ numero\},$

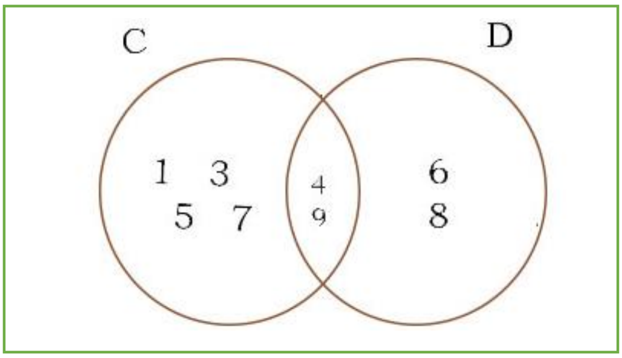


Ilustración 17: números

➢ ***Ejemplo 6.***

1. Descripción.

   Representar los siguientes conjuntos:
   E= {a, c}, F= {c, d, f}, G= {c, f, g}.

2. Notación matemática.

$E = \{x/x\ es\ una\ letra\}, F = \{x/x\ es\ una\ letra\},$
$G = \{x/x\ es\ una\ letra\}$

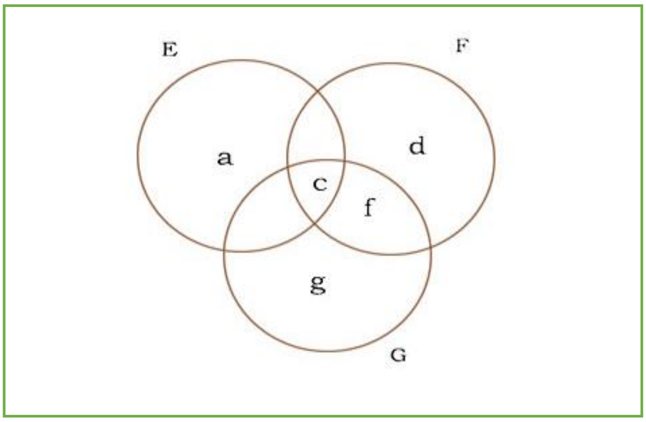


Ilustración 18 Letras

1.4. Cardinalidad de un conjunto.

Definición.

- La cardinalidad de un conjunto es la que indica el número o la cantidad de elementos que tiene el conjunto. Su símbolo esta denotado por $N(A)$.

Es muy interesante como Córdova y Fernández definen el concepto de cardinalidad de un conjunto en donde indican que: “Se denomina número cardinal a la entidad abstracta que simboliza todos los conjuntos que son coordinables entre sí y los distingue los no coordinables: uno, dos, tres, etc. Por lo tanto, decir que dos conjuntos son coordinables es lo mismo que decir que tienen el mismo número de elementos.” (Córdoba & Fernández, 2017)

“Es la cantidad de elementos de un conjunto a. Se denota por el símbolo $N(A)$.” (Espol, 2008)

1.4.1. Ejemplos.

- ***Ejemplo 1.***

1. Descripción por comprensión de un conjunto de materias que hay en un paralelo
$A = \{x/x\ Materia\ Del\ Paralelo\ MA\ 3-2\}$

2. Definición del conjunto por tabulación.

$$A = \{Matemáticas\ III, Probabilidad\ Y\ Estadísticas, Programación\ III\}$$

3. Gráfica mediante diagrama de Venn.

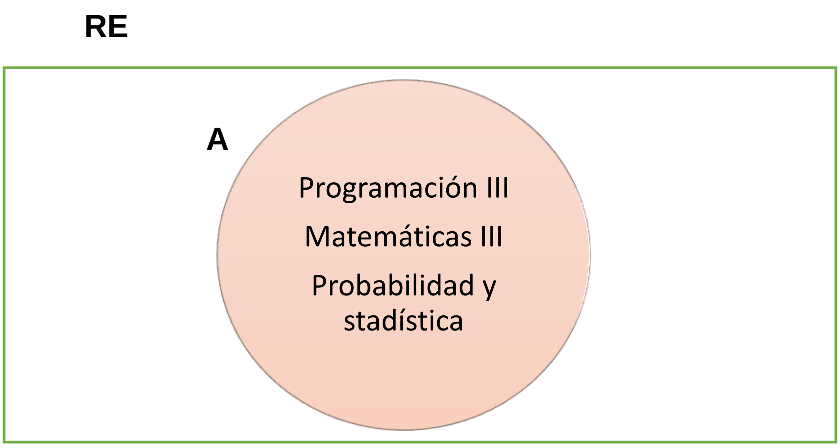


Ilustración 19: Diagrama de Venn de materias - (Eejemplo 1)

4. Calculo de la cardinalidad y su interpretación.
$N(A) = 3$, porque los conjuntos definidos están conformados por 3 elementos

- ***Ejemplo 2.***

Sea B el conjunto de 3 carreras de la Universidad de Guayaquil que ven programación en primer semestre.

1. Descripción por extensión.

$B = \{Ing. En\ Sistemas, Ing. En\ Networking, Ing. En\ TeleinformÁtica\ \}$

2. Grafica mediante un diagrama de Venn.

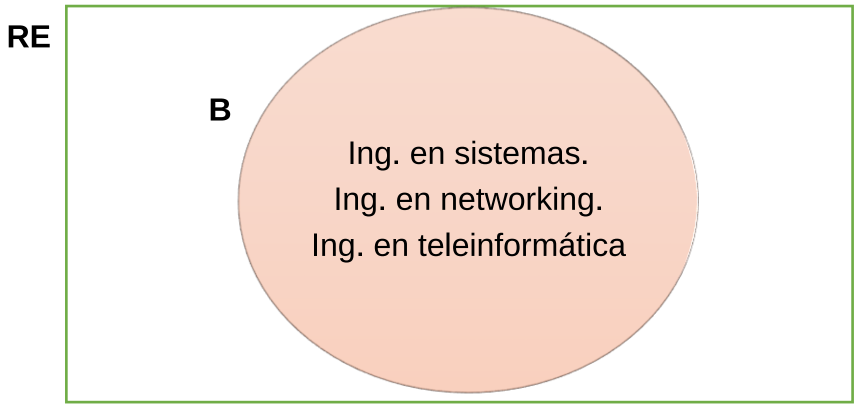


Ilustración 20: Diagrama de Venn de carreras universitarias

3. Calculo de la cardinalidad y su interpretación.
   $N(B) = 3$, porque el conjunto B esta conformado por 3 elementos.

- ***Ejemplo 3.***
  Defina un conjunto por los 3 métodos de descripción vistos anteriormente, le conjunto debe contener al menos 4 lenguajes de programación conocidos. Posterior a ello calcule su cardinalidad.

1. Descripción del conjunto.

   Por comprensión.
   $C = \{x/x\ es\ lenguaje\ de\ programación\ conocido\}$

   Por tabulación.
   $C = \{Python, C++, C, PHP\}$

   Por diagrama de Venn.

RE

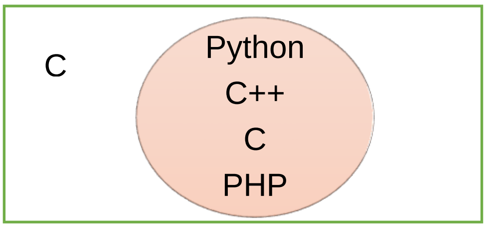


Ilustración 21: Diagrama de Venn de lenguajes de programación

2. Calculo de la cardinalidad de los conjuntos e interpretación.
   $N(C) = 4$, porque los conjuntos están conformados por 4 elementos los cuales son lenguajes de programación reconocidos.

- ***Ejemplo 4.***

Descripción por comprensión de un conjunto de materias que hay en un paralelo

$A = \{x/x \; sean \; numeros \}$

Definición del conjunto por tabulación.

$$A = \{1, 2, 3 , 5, 7\}$$

Gráfica mediante diagrama de Venn.

RE

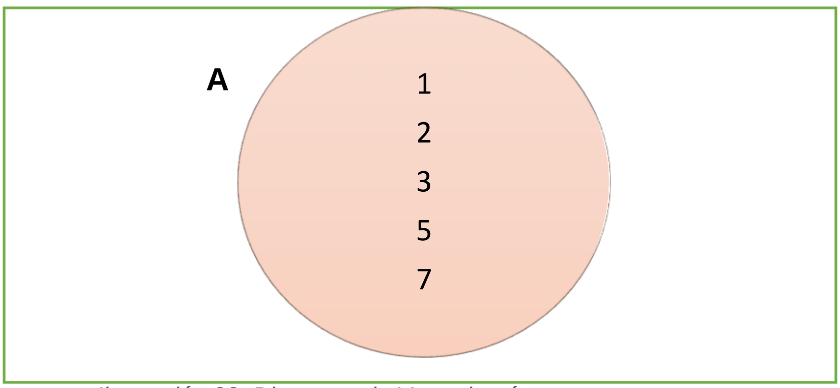


Ilustración 22: Diagrama de Venn de números

Calculo de la cardinalidad y su interpretación.

$N(A) = 5$, porque los conjuntos definidos están conformados por 5 elementos

- ***Ejemplo 5.***

Descripción por comprensión de un conjunto de materias que hay en un paralelo
$D = \{x/x \ sean \ letras\}$

Definición del conjunto por tabulación
$D = \{a, c, f, g, h, j, k, s\}$

Gráfica mediante diagrama de Venn.

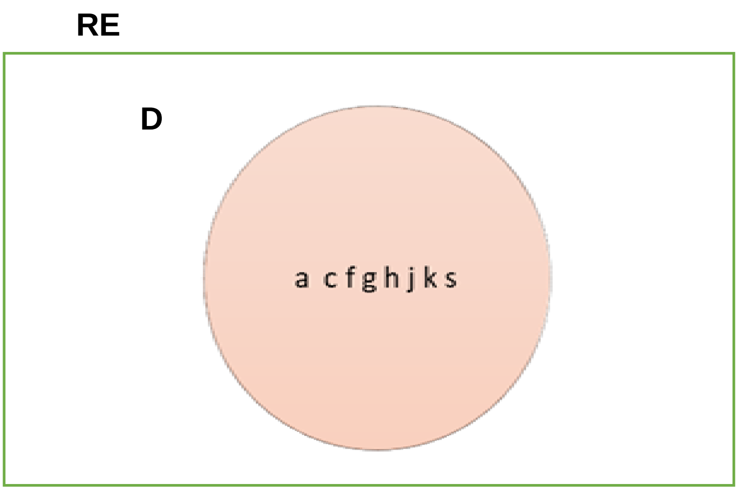


Ilustración 23: Diagrama de Venn de letras

Calculo de la cardinalidad y su interpretación.

$N(D) = 8$, porque los conjuntos definidos están conformados por 8 elementos

1.5. Conjuntos relevantes y su clasificación.

Los conjuntos se clasifican de acuerdo a la cantidad de elementos que poseen. Es por ello que se clasifican en los siguientes tipos de conjuntos:

1.5.1. Conjunto vacío.

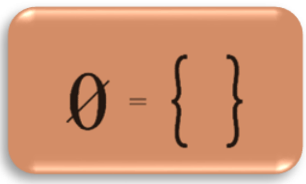


Ilustración 24: Conjunto vacío

Definición.

- Un conjunto se denomina vacío cuando no tiene elementos. El símbolo que lo representa es ∅ y su cardinalidad, al no tener elementos, es de 0 .

"Conjunto vacío es el que no tiene elementos y esta denotado por ∅ ó por llaves { }." (Pérez & Caludia., 2013)

“Un conjunto A es vacío si no tiene elementos. El símbolo que lo representa es $\emptyset$.” (Córdoba & Fernández, 2017)

1.5.1.1. Ejemplos.

- ***Ejemplo 1.***

1. Definición del conjunto.
$$A = \{x/x \text{ es un número de estudiantes de paralelo } ISI - MA - 1 - 2 \text{ menor que } 1 \text{ y mayor que } 50\}$$

2. Interpretación.

Es vacío ya que dicho paralelo está conformado por 41 estudiantes.

Ilustración 25: Grupo de estudiantes - (Ejemplo 1)

- ***Ejemplo 2.***

$$A = \{x/x \text{ es personas vivas que sean mayores a } 300 \text{ años}\}$$

1. Descripción del conjunto.
$A = \{\phi\}$

2. Interpretación
Es un conjunto vacío, ya que, en la historia actual no hay personas que vivan más de 110 años.

Ilustración 26: Ancianos - (Ejemplo 2)

- **Ejemplo 3.**

Sea el conjunto: $A = \{x/x\,2 = 5, x \text{ es un número natural y es par}\}$. Grafique sus elementos en un diagrama de ven.

Solución:

1. Desarrollo del problema

$(2)2 = 4$

$(4)2 = 8$

2. Gráfica.

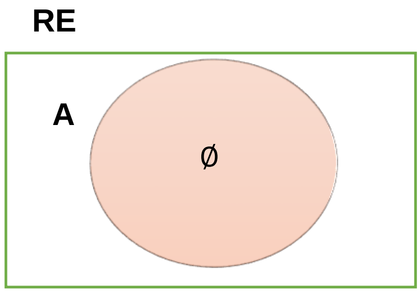


Ilustración 27. Diagrama de Venn del ejercicio planteado

3. Interpretación.

Es un conjunto vacío porque no hay un número natural y par que al multiplicarlo por 2 de igual a 5.

1.5.2. Conjunto unitario.

1.Definición.

- Un conjunto se denomina unitario cuando tiene solo un elemento. Su cardinalidad es: $N(A) = 1$.

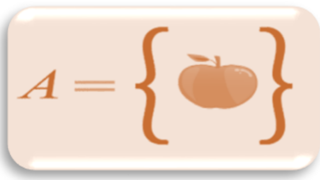


Ilustración 28: Conjunto unitario

"Conjunto Unitario nos indica que tiene un solo único elemento." (Córdoba & Fernández, 2017)

"Conjunto unitario o singular, es aquel que tiene un solo elemento." (Pérez & Caludia., 2013)

1.5.2.1. Ejemplos.

➢ ***Ejemplo 1.***

Grafique mediante diagrama de Venn el siguiente conjunto:

$A = \{x/x\ es\ facultades\ donde\ hay\ la\ carrera\ de\ ing.en\ sistemas\ de\ la\ U.Guayaquil\}$

Solución:

1. Interpretación

En la universidad de Guayaquil solo hay una facultad donde se enseña la carrera de ingeniería en sistemas por lo que la $N(A) = 1$.

$A = \{Facultad\ de\ matemáticas\ y\ física\}$

2. Gráfica.

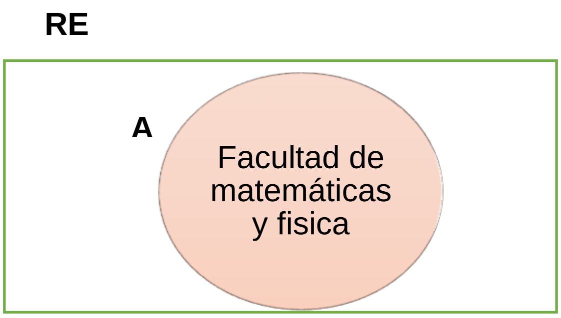


Ilustración 29: Diagrama de Venn

- ***Ejemplo 2.***

Sea el conjunto $B = \{x/x\ es\ satélite\ natural\ del\ planeta\ tierra\}$

Solución:

1. Definición del problema

$B = \{luna\}$

2. Gráfica

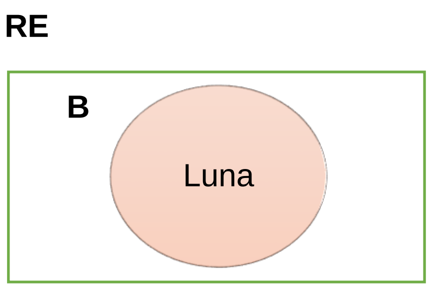


Ilustración 30:Diagrama de Venn del problema

- ***Ejemplo 3.***

Sea el conjunto $C = \{x/x\ es\ un\ número\ natural\ \ mayor\ que\ 0\ y\ menor\ que\ 2\ \}$
Solución:

1. Análisis del problema
   $2 > x > 0$
   $x = 1$

2. Gráfica.

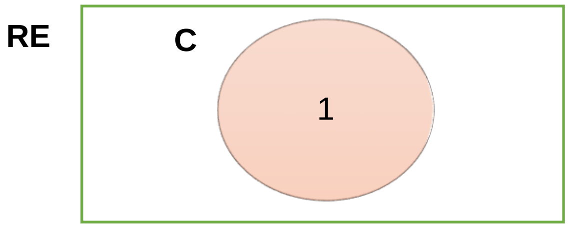


Ilustración 31: Diagrama de Venn del problema

3. Interpretación.
   El único número natural mayor que 0 y menor que 2 es el 1 por lo que conjunto es unitario.

- ***Ejemplo 4.***

Sea el conjunto $D = \ \{x/x\ es\ la\ estrella\ que\ calienta\ la\ tierra\}$

Solución:

Definición del problema
$B = \{El\ Sol\}$

Gráfica

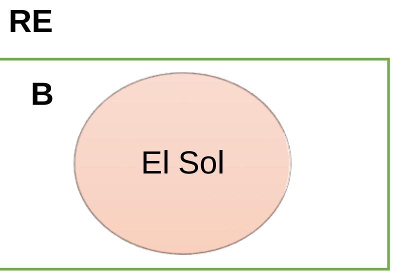


Ilustración 32: Diagrama de Venn del problema

Interpretación.
Es la única estrella que calienta al planeta Tierra.

- ***Ejemplo 5.***

Sea el conjunto $D = \{x/x\ es\ elpresidete\ de\ l\ Ecuador\}$

Solución:

Definición del problema
$B = \{Lenin\ Moreno\}$

Gráfica

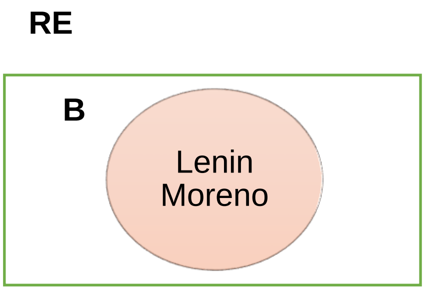


Ilustración 33: Diagrama de Venn del problema

Interpretación.
Lenin Moreno es el actual presidente del Ecuador.

1.5.3. Conjunto finito.

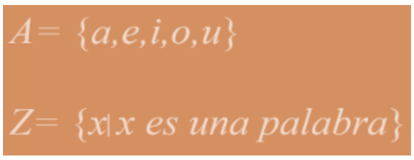


Ilustración 34: Conjunto finito de vocales

Definición.

- Son los que tienen un número de elementos conocidos y estos por ende se pueden contabilizar. Por ejemplo, sea el conjunto $A = \{x/x\ es\ vocal\}$ el cual es un conjunto finito con una cardilanidad $N(A) = 5$.

"Conjunto finito es el que tiene una cantidad finita de elementos." (Ivorra & Carlos, 2010)

"Conjunto finito es aquel que tiene una cantidad limitada de elementos, es decir el proceso de contar sus elementos concluye en algún instante" (Córdoba & Fernández, 2017)

1.5.3.1. Ejemplos.

- ***Ejemplo 1.***

Describa por tabulación el conjunto de las letras que tiene “Universidad Guayaquil”

Solución:
Descripción por tabulación.

$$L = \{u, e, a, i\}$$

Grafica.

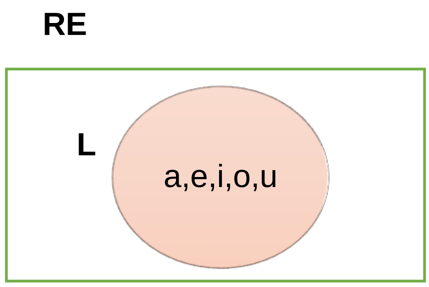


Ilustración 35: Diagrama de Venn del conjunto L

Calculo de la cardinalidad.

$$N(L) = 4$$

Interpretación.
Es un conjunto finito ya que se pueden contabilizar los elementos del conjunto

- Ejemplo 2.
-

Sea el conjunto:

$$Y = \{\frac{x}{x} es\ el\ Decano\ de\ la\ facultad\ de\ Fisica\ yMatematicas\ \}$$

Determine si es un conjunto finito a través de su cardinalidad.

Solución:

Descripción por tabulación.

$$Y = \{Ing. Angela\ Torres\}$$

Grafica.

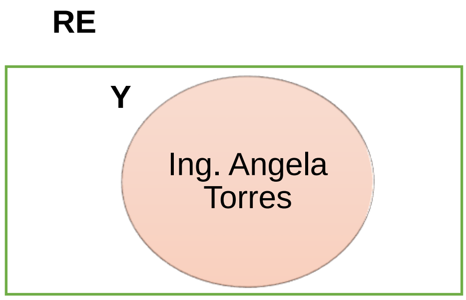


Ilustración 36: Diagrama de Venn del conjunto Y - (Ejemplo 2)

Calculo de la cardinalidad.

$$N(Y) = 1$$

- ***Ejemplo 3.***

Sea el conjunto:
$O = \{x/x \text{ es océanos del planeta tierra}\}$

Determine si es un conjunto finito a través de su cardinalidad.

Solución:
Descripción por tabulación.

$$O = \{pacífico, atlántico, índico, antártico, ártico\}$$

Grafica.

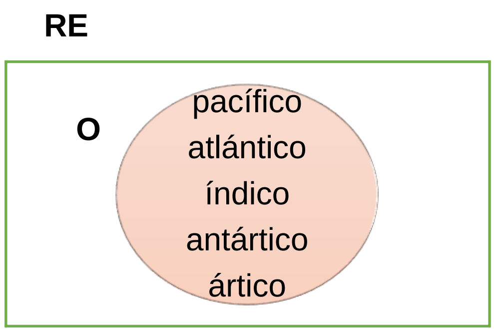


Ilustración 37: Diagrama de Venn del conjunto O - (Ejemplo 3)

Calculo de la cardinalidad.

$$N(O) = 5$$

- ***Ejemplo 4.***

Sea el conjunto:

$O\ = \{x/x\ son\ los\ dedos\ de\ la\ mano\}$

Determine si es un conjunto finito a través de su cardinalidad.

Solución:

Descripción por tabulación.

$$O = \{meñique, indice, medio, anular, pulgar\}$$

Grafica.

Ilustración 38: Diagrama de Venn del conjunto O - (Ejemplo 4)

Calculo de la cardinalidad.

$$N(O) = 5$$

- ***Ejemplo 5.***

Sea el conjunto: $O\ = \{x/x\ ruedas\ de\ un\ automovil\}$

Determine si es un conjunto finito a través de su cardinalidad.

Solución:

Descripción por tabulación.

$$O = \{4\ ruedas\}$$

Grafica.

Ilustración 39: Diagrama de Venn del conjunto O - (Ejemplo 5)

Calculo de la cardinalidad.

$$N(O) = 4$$

1.5.4. Conjunto infinito.

1.Definición.

- Un conjunto se denomina infinito cuando posee una cantidad ilimitada de elementos y por ende es difícil de contabilizar. Por ejemplo, sea el conjunto B={x/x es constelaciones del universo}, el cual es un conjunto infinito ya que es imposible saber el número exacto de constelaciones que hay en el universo.

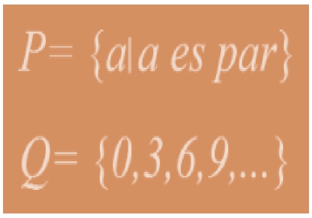


Ilustración 40: Conjunto infinito

Otros autores dan su punto de vista conceptual respecto a conjunto infinito, es así que en el libro de matemáticas de la Escuela superior politécnica ESPOL, lo define como: “Conjunto infinito es aquel que no posee una cantidad que sea finita de elementos.” (Espol, 2008)

Por otra parte, los autores Pérez y Caludia dan su propia definición, e indican que: “Son aquellos conjuntos que tienen un número ilimitado de elementos.” (Pérez & Caludia., 2013)

1.5.4.1. Ejemplos.

- ***Ejemplo 1.***

Sea: $D = \{x/x\ es\ numero\ de\ ingenieros\ graduados\ en\ la\ U.Guayaquil\}$

Ilustración 41: Ingenieros - (Ejemplo 1)

- **Ejemplo 2.**

Sea: $E = \{x/x\ es\ número\ de\ granos\ de\ arena\ de\ Villamil\ playas\}$

Ilustración 42: Arena - (Ejemplo 2)

- **Ejemplo 3.**

Sea: $F = \{x/x\ es\ constelaciones\ del\ universo\}$

Ilustración 43: Constelaciones - (Ejemplo 3)

- **Ejemplo 4.**

Sea: $E = \{x/x\ es\ número\ de\ gotas\ de\ lluvia\ en\ una\ tormenta\}$

Ilustración 44: Goas de lluvia - (Ejemplo 4)

- **Ejemplo 5.**

Sea: $E = \{x/x\ la\ cantidad\ de\ numeros\ reales\}$

Ilustración 45: Números reales - (Ejemplo 5)

1.5.5. Conjunto universo.

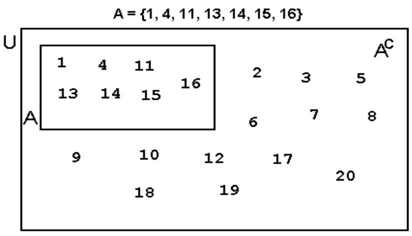


Ilustración 46: Conjunto universo

Definición.

- Es un conjunto para el estudio o análisis de alguna situación particular dada, que contiene a todos los conjuntos considerados. Se le denota generalmente por la letra U.

"Es el conjunto de todos los elementos considerados en un problema o situación dada." (Pérez & Caludia., 2013)

"Conjunto universo o referencial es el que contiene a todos los elementos que se consideren en un problema, o situación, sin contener lo que no interesa al problema. El símbolo que representa al conjunto universo es $U\ o\ Re$."

1.5.5.1. Ejemplos.

- ***Ejemplo 1.***

Sea el conjunto $A = \{sen(x), cosc(x), tan(x)\}$. Determine su conjunto universo.

Solución.

1. Definición.

$U = \{identidades\ trigonométricas\}$

2. Grafica.

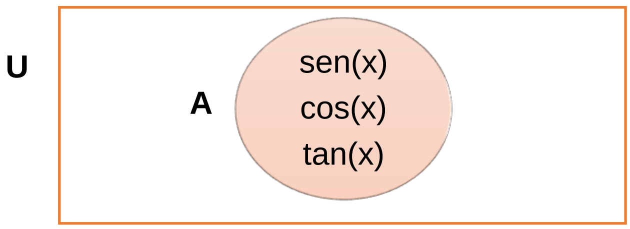


Ilustración 47: Representación del conjunto universo

- ***Ejemplo 2.***

Sean los conjuntos $A = \{a, e, i\}$ y $B = \{b, c, d\}$. Determine su conjunto universo.

Solución.

1. Definición.

   Su conjunto universo es:

$$U = \{Letras\ del\ abecedario\}$$

2. Grafica.

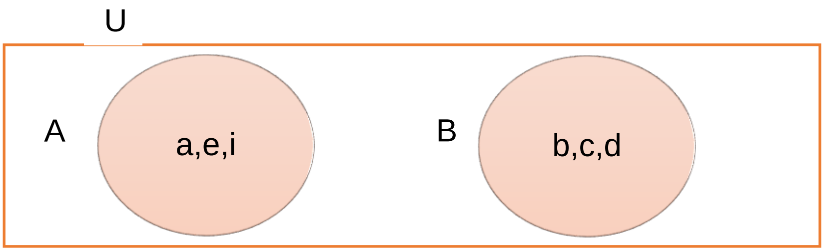


Ilustración 48: Representación del conjunto universo de los conjuntos A y B

- ***Ejemplo 3.***

Sean los conjuntos:
$E\ =\ \{\,niños\,\}$
$F\ =\ \{\,niñas\,\}$

1. Definición.
   Su conjunto universo es:

$$U\ =\ \{seres\ humanos\}$$

2. Gráfica.

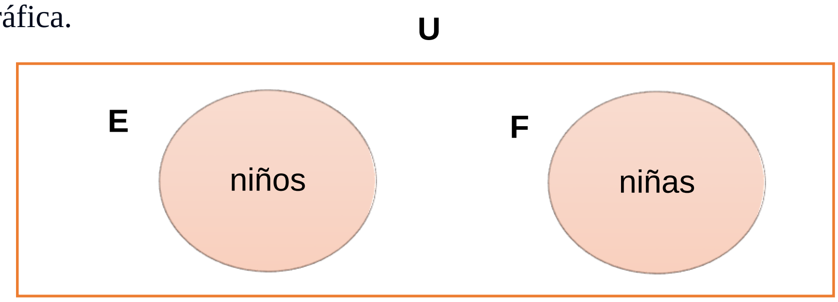


Ilustración 49: Conjunto universo de los conjuntos E y F

- ***Ejemplo 4.***

Sean los conjuntos $A = \{mamiferos, aves\}$ y $B = \{reptiles, peces\}$. Determine su conjunto universo.

Solución.

1. Definición.
   Su conjunto universo es:

$$U = \{animales\}$$

2. Grafica.

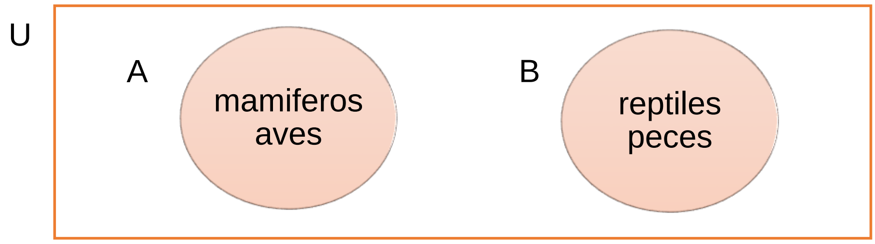


Ilustración 50. Representación del conjunto universo de los animales

- ***Ejemplo 5.***

Sean los conjuntos $A = \{1, 3, 5, 7\}$ y $B = \{11, 13, 17, 19\}$.
Determine su conjunto universo.

Solución.

1. Definición.
   Su conjunto universo es:

$$U = \{numeros\ primos\}$$

2. Grafica.

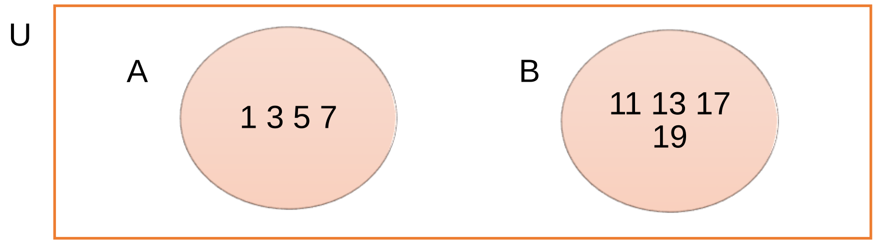


Ilustración 51. Representación del conjunto universo de los números primos

1.6. Cuantificadores.

Son tipos de expresiones con las cuales podemos indicar cuantos elementos, pertenecientes a un determinado conjunto, cumplen con ciertas propiedades ya sean pertenencia, equivalencia, entre otras.

1.6.1. Cuantificador universal.

1.Definición.

- El cuantificador universal forma parte de un lenguaje formal que tiene expresiones como: "para todo", "todo", "cada", "para cada", que indican si un elemento cumple con ciertas leyes. Su símbolo es (∀).

Ilustración 52: Cuantificador universal

"El cuantificador universal se utiliza para afirmar que todos los elementos de un conjunto cumplen con una determinada propiedad." (mendoza, 2014)

"Indica que algo es cierto para todos los individuos. Sea a una expresión y sea x una variable. Si deseamos indicar que a, es verdadero para todos valores posibles de x, escribiremos $(\forall x)$." (Takeyas, 2013)

1.6.1.1. Ejemplos.

- ***Ejemplo 1.***

Sea A el conjunto del nombre de los estudiantes que estudian en la Universidad Guayaquil.

Sea $A = \left\{\frac{x}{x} \textit{ alumno pertenece a la universidad de Guayaquil}\right\}$

1. Descripción.
   Sea A el conjunto de los elementos de x tales que x es estudiante de la universidad Guayaquil.

2. Notación matemática.
   $\forall x: A = \textit{ Para todo } x, x \textit{ es estudiante de la Universidad de Guayaquil}$

Ilustración 53: Universidad - (Ejemplo 1)

- ***Ejemplo 2.***

Sea P el conjunto de nombres de lenguajes de programación.
Sea $P = \{x/x\ es\ lenguaje\ de\ programación\}$

1. Descripción.
   Sea P el conjunto de los elementos de x tales que x es lenguaje de programación.

2. Notación matemática.
$\forall\ x: P\ = “Para\ todo\ x, x\ es\ lenguaje\ de\ programación"$

Ilustración 54. Programación - (Ejemplo 2)

- ***Ejemplo 3.***

Sea B el conjunto de nombres de materias que se ven en la carrera de ingeniería en teleinformática.

Sea *B(x)= {x/x es materia de 1er semestre de la carrera de ingeniería en teleinformática}*

1. Descripción.
   Sea B el conjunto de los elementos de x tales que x es materia de 1er semestre de la carrera de ingeniería en teleinformática.

2. Notación matemática.
∀x: B(x) = “Para todo x, x es carrera de primer semestre de ingeniería en teleinformática”

Ilustración 55: teleinformática - (Ejemplo 3)

- ***Ejemplo 4.***

Sea P el conjunto de nombres de lenguajes de programación.
Sea $P = \{\text{x/x } es\ vehiculo\ marca\ nissan\}$

1.Descripción.
Sea P el conjunto de los elementos de x tales que x es un vehículo marca Nissan.

2.Notación matemática.

$\forall\ x: P\ = \text{“}Para\ todo\ x, x\ es\ un\ vehiculo\ marca\ nissan\text{"}$

Ilustración 56: Vehículo marca Nissan - (Ejemplo 4)

- ***Ejemplo 5.***

Sea R el conjunto de nombres de lenguajes de programación.
Sea $R = \{\text{x/x } es\ telefono\ samsung\}$

1.Descripción.

Sea R el conjunto de los elementos de x tales que x es un teléfono Samsung.

2.Notación matemática.

$\forall\ x: R\ = \text{“}Para\ todo\ x, x\ es\ un\ telefono\ samsung\text{"}$

Ilustración 57: teléfono Samsung - (Ejemplo 5)

1.6.2. Cuantificador existencial.

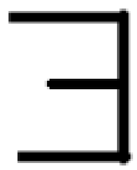


Ilustración 58. Cuantificador existencial

Definición.

- El cuantificador existencial forma parte de un lenguaje formal que tiene expresiones como: “existe”, “algún”, “algunos”, “por lo menos uno”, “basta que uno”, que indican si un elemento cumple con ciertas leyes. Su símbolo es $\exists x$.

“Se utiliza para indicar que existen uno o más elementos en el conjunto a que cumple o cumplen con una condición determinada.” (Sequera, 2014)

“El cuantificador existencial se usa para indicar que hay uno o más elementos en el conjunto que cumplen una determinada propiedad”. (mendoza, 2014)

1.6.2.1. Ejemplos.

- ***Ejemplo 1.***

Sean: A el conjunto de nombre de estudiante que estudia la carrera de ingeniería en teleinformática.

B el conjunto de estudiantes mayores de 18 años.

$A = \{x/x\ estudia\ la\ carrera\ de\ ingeniería\ en\ teleinformática\}$
$B = \{x/x\ es\ mayor\ de\ 18\ años\}$

1. Descripción.
   Sea A, el conjunto de los elementos de x tales que x es estudiante de la carrera de ingeniería en sistemas
   Sea B, el conjunto de los elementos de x tales que x es estudiante mayor de 18 años.

2. Notación matemática.

$\exists x: A(x)\ \Lambda\ B(x)$

Existen estudiantes de la de la carrera de ingeniería en teleinformática que son mayores de 18 años.

Ilustración 59: teleinformática - (Ejemplo 1)

- ***Ejemplo 2.***

Sean: A el conjunto de nombres de lenguajes de programación.
B el conjunto de lenguajes complejos.
$A = \{x/x\ es\ lenguaje\ de\ programación\}$
$B = \{x/x\ es\ un\ lenguaje\ complejo\}$

1. Descripción.
   Sea A, el conjunto de los elementos de x tales que x es lenguaje de programación.
   Sea B, el conjunto de los elementos de x tales que x es complejo.

2. Notación matemática.

$\exists x: A(x)\ \Lambda\ B(x)$

Existen lenguajes de programación que son complejos.

Ilustración 60. Lenguaje de programacion - (Ejemplo 2)

- ***Ejemplo 3.***

Sean: D el conjunto de nombres de personas que estudian en la carrera de ingeniería en sistemas y E el conjunto de personas que estudian Python.

D(x)= {x/x estudia en la carrera de ingeniería en sistemas}
E(x)= {x/x estudia el lenguaje de programación Python}

1. Descripción.
   Sea D, el conjunto de los elementos de x tales que x es estudiante de la carrera de ingeniería en sistemas.
   Sea E, el conjunto de los elementos de x tales que x estudia el lenguaje de programación Python.

Ilustración 61: Ingeniería en sistemas (Ejemplo 3)

2. Notación matemática.

∃ x: D(x) Λ E(x)

Existen estudiantes de la carrera de ingeniería en sistemas que estudian Python

- ***Ejemplo 4.***

Sean: D el conjunto de vehículos que consumen gasolina y E el conjunto de vehículos que transportan animales.

D(x)= {x/x vehículos que consumen gasolina}
E(x)= {x/x el conjunto de vehículos que transportan animales}

1. Descripción.
   Sea D, el conjunto de los elementos de x tales que x es vehículo que consumen gasolina.
   Sea E, el conjunto de los elementos de x tales que x es vehículo que transporta animales.

2. Notación matemática.

∃ x: D(x) Λ E(x)

Existen vehículos que consumen gasolina y transportan animales.

Ilustración 62: Ejemplo 4

1.7. Subconjuntos.

1.Definición.

- Decimos que un conjunto A está incluido o es subconjunto de un segundo conjunto B, cuando todos los elementos del primero constituyen el segundo conjunto y se lo denota de la siguiente manera $A \subset B$.

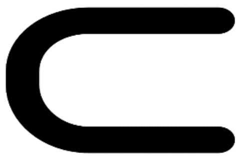


Ilustración 63: Símbolo de subconjunto.

3. “Sean $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ dos conjuntos cualesquiera, puede pasar que todos y cada uno de los elementos de uno correspondan al otro. Si es el caso, decimos que a es subconjunto de $\boldsymbol{B}$. Eso se denota en los conjuntos con el símbolo $\subset$. Así, tenemos que $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B}$. (Ciudad universitaria, 2013)

“El conjunto a es subconjunto de B si los elementos de A estan incluidos en el conjunto B. Si a es subconjunto de B , pero b no es subconjunto de A, se asume que A es subconjunto propio de B.” (Espol, 2008)

1.7.1. Ejemplos.

- ***Ejemplo 1.***

1. Definición.
   Sean los conjuntos A y B:
   $A = \{18,19,20,21,22,23,24\}$
   $B = \{22,23,24\}$

2. Notación matemática.

$$B \subset A$$

3. Gráfica.

A

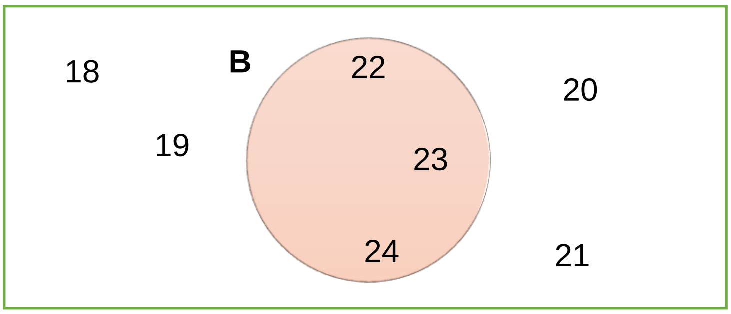


Ilustración 64: Representación de subconjunto - (Ejemplo 1)

4. Interpretación.
   B es subconjunto de A porque los elementos de B están incluidos en A.

- ***Ejemplo 2.***

  1. Definición.
     Sean los conjuntos C y D:

  $C = \{x/x\ es\ ingeniería\ de\ la\ universidad\ de\ guayaquil\}$

  $D = \{ing. En\ sistemas\ de\ información, ing. En\ sistemas, ing. Civil\}$

  2. Notación matemática.

  $C = \{ing. civil, ing. en\ comercio, ing. en\ sistemas, ing. química,$
  $ing. en\ sistemas\ de\ información\}$

  $D = \{ing. En\ sistemas\ de\ información, ing. En\ sistemas, ing. Civil\}$

$$D \subset C$$

  3. Gráfica.

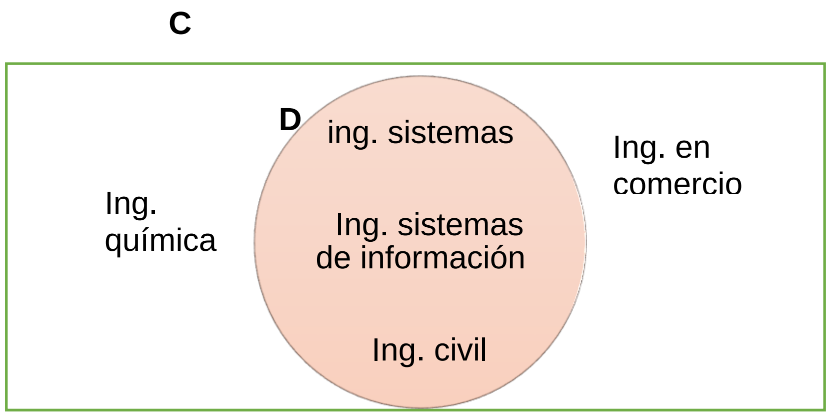


Ilustración 65: Representación de subconjunto - (Ejemplo 2)

  4. Interpretación.

  D es subconjunto de C porque los elementos de D estan incluidos en C.

- ***Ejemplo 3.***

  1. Definición.
     Sean los conjuntos E y F:

$E = \{x/x \text{ es lenguaje de programación}\}$

$F = \{c, c++, python\}$

2. Notación matemática.

   $E = \{c, c++, python, c\#, Java, PHP\}$

   $F = \{c, c++, python\}$

$$F \subset E$$

3. Grafica.

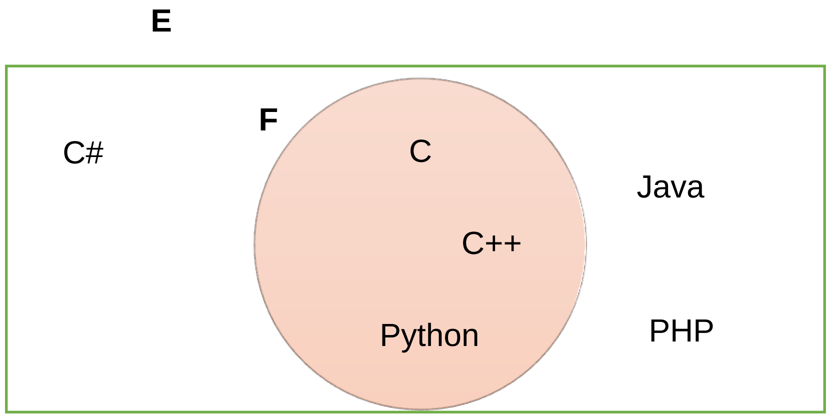


Ilustración 66: Representación de subconjunto - (Ejemplo 3)

4. Interpretación.
   F es subconjunto de E porque los elementos de F se encuentran incluidos en E.

$$E = \{x/x \text{ es lenguaje de programación}\}$$
$$F = \{c, c++, C\#\}$$

Descripción:

F ⊂ E, F es subconjunto de e porque los elementos de F se encuentran incluidos en E.

1.8. Conjunto potencia.

Ilustración 67: Conjunto potencia.

1.Definición.

- Sea A un conjunto definido previamente, el conjunto potencia perteneciente a A es el que esta conformado por todos los subconjuntos del conjunto A. El conjunto potencia se representa por $P(A)$ y su cardinalidad se denota por $N(P(A))$ esto es igual a $2^{N(A)}$.

"El conjunto potencia de un conjunto definido es otro conjunto formado por los subconjuntos del conjunto dado previamente." (Jech, 2013)

"Dado un conjunto A, su conjunto potencia es el formado por todos los subconjuntos posibles de A. Su símbolo es $P(A)$". (Espol, 2008).

1.8.1. Ejemplos.

- ***Ejemplo 1.***

Sea $A = \{ing. En\ sistemas, ing. En\ networking, ing. En\ teleinformática\}$, calcule su conjunto potencia.

1. Determinamos la cardinalidad del conjunto A
   $N(A) = 3$

2. Aplicamos la fórmula para determinar el conjunto potencia.

$$2^{N(A)}$$
$$2^3 = 8$$

3. Definimos el conjunto $P(A)$ por tabulación.

$$P(A) = \left\{ \begin{matrix} \emptyset, \{ Ing. En\ sistemas\}, \\ \{Ing. En\ networking\}, \{Ing. En\ teleinformática\ \}, \\ \{ Ing. En\ sistemas, ing. En\ networking\}, \\ \{ Ing. En\ sistemas, Ing. En\ teleinformática\ \}, \\ \{Ing. En\ networking, Ing. En\ teleinformática\ \}, A \end{matrix} \right\}$$

Ilustración 68: Red de computadoras - (Ejemplo 1)

- ***Ejemplo 2.***

Sea el conjunto $B = \{ Laptop, Tablet, Iphone\}$. Determine sus subconjuntos y calcule su conjunto potencia.

1. Determinamos la cardinalidad del conjunto B
   $N(B) = 3$

2. Aplicamos la fórmula para determinar el conjunto potencia.
   $2^{N(B)}$
   $2^3 = 8$

3. Definimos el conjunto $P(B)$ por tabulación.

$$P(B) = \left\{ \begin{matrix} \emptyset, \{Laptop\}, \{tablet\}, \{Iphone\}, \\ \{Laptop, Tablet\}, \{Laptop, Iphone\}, \{Tablet, Iphone\}, \\ B \end{matrix} \right\}$$

Ilustración 69: Aparatos tecnológicos - (Ejemplo 2)

- ***Ejemplo 3.***

Determine un nuevo conjunto D que contenga los elementos de $C \subset B$ y posteriormente calcule el conjunto potencia de D.
Sean los conjuntos:

$B = \{x/x \; es \; par \; y \; x < 7\}$
$C = \{2,4\}$

1. Definimos conjuntos.
   $C \subset B = D$
   $B = \{2,4,6\}$
   $C = \{2,4\}$
   $D = \{2,4\}$

2. Grafica.

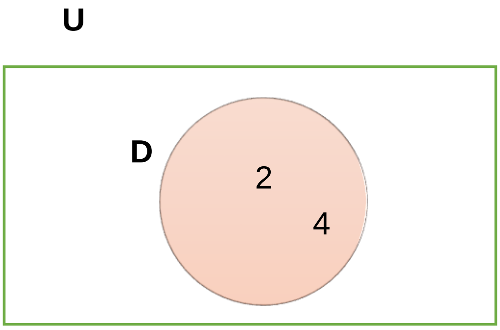


Ilustración 70: Representación de subconjunto - (Ejemplo 3)

3. Calculamos las cardinalidades de los conjuntos.
   $N\,(B) = 3$
   $N(D) = 2$

4. Solución del problema
   $2^2 = 4$

$$P(D) = \{\,\emptyset\{2\},\{4\},\{2,4\}\}$$

1.9. Igualdad entre conjuntos.

1.Definición.

- Sean A y B dos conjuntos definidos, estos son iguales si y solo si A es subconjunto de B y B es subconjunto de A, en otras palabras, que los dos conjuntos se contienen por igual. $A = B$

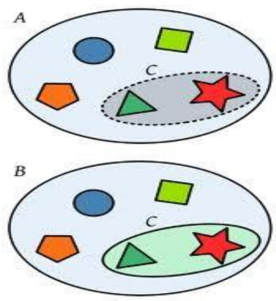


Ilustración 71: Conjuntos iguales

"Dos conjuntos son iguales sólo si tienen exactamente los mismos elementos, sin importar el orden en que estos estén dispuestos." (Ciudad universitaria, 2013)

"A y B son iguales si tienen los mismos elementos, es decir, que ambos conjuntos se contienen mutuamente." (Espol, 2008)

1.9.1. Ejemplos.

- **Ejemplo 1.**

Determine si el siguiente enunciado es falso o verdadero y justifique. Sean los siguientes conjuntos A, B, C.

$$A = \{quimica, matemática, física\}$$
$$B = \{matemática, física, química\}$$
$$C = \{fisica, matemática, química\}$$

¿Si $A = B$ y $B = C$ entonces $A = C$?

Si, porque A contiene los mismos elementos de B; Y B contiene los mismos elementos de C por ende los elementos de A estan incluidos en C.

Ilustración 72: (Ejemplo 1)

- ***Ejemplo 2.***

Verifique si los dos conjuntos a continuación son iguales

$A = \{x/\ x^2 = 16\}$ $\qquad$ $B = \{x/\ (x+4)(x-4) = 0\}$

Solución:

1. Resolvemos los conjuntos.

$A = \{-4, 4\}$

$B = \{4, -4\}$

2. Grafica.

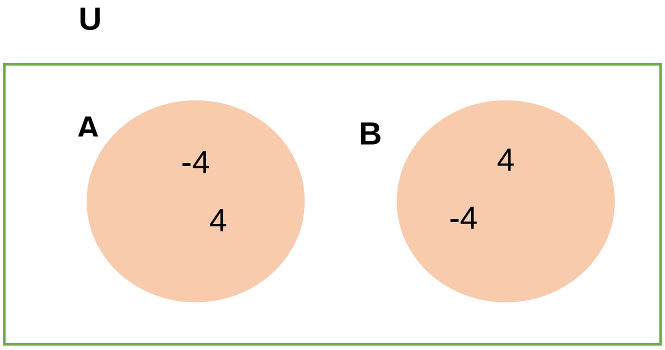


Ilustración 73: Diagramas de venn - (Ejemplo 2)

3. Interpretación de resultados.

   Si, $A = B$ porque los elementos que están en A se encuentran en B

- ***Ejemplo 3.***

  Determine si D es igual al conjunto E

  $D = \{x/x \text{ es una carrera de Facultad de Ingeniería Industrial}\}$

  $E = \{Ing.\, industrial, ing.\, en\ teleinformáticas,$
  $lic.\, en\ sistemas\ de\ información\}$

1. Gráfica.

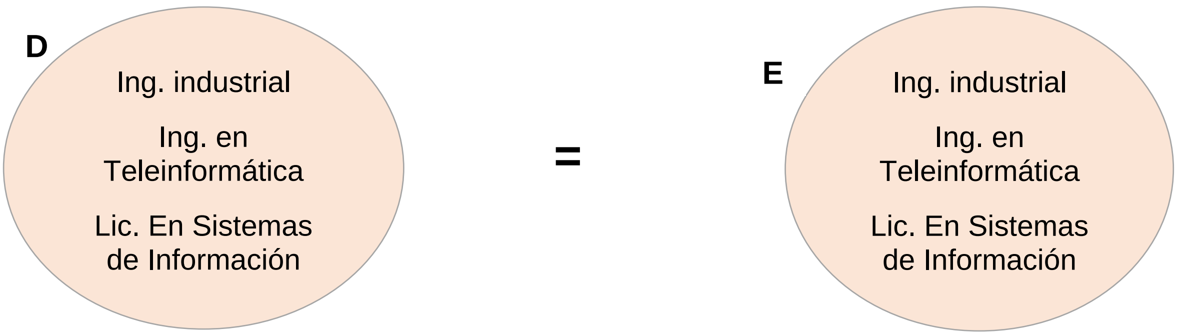


Ilustración 74: Diagramas de venn - (Ejemplo 3)

2. Interpretación.

$D = E$, ya que el conjunto E contiene todos los elementos del conjunto D.

1.10. Conjuntos disjuntos e Intersecantes.

1.Definición.

- Sean A y B dos conjuntos cualesquiera, los podemos denominar disjuntos si no tienen ningun elemento común y los denominaremos intersecantes si estos tienen al menos un elemento en común.

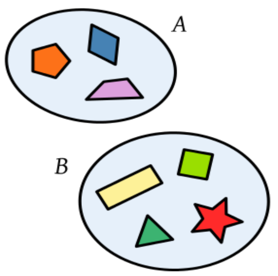


Ilustración 76: Conjuntos disjuntos

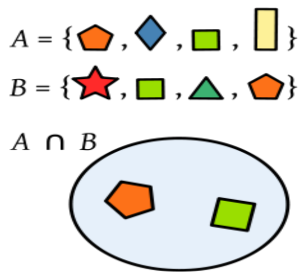


Ilustración 75: Conjuntos intersecantes.

"Se denominan conjuntos disjuntos cuando no tienen ningún elemento en común. Se denominan conjuntos intersecantes cuando tienen al menos un elemento en común." (Ciudad universitaria, 2013)

"Dos conjuntos cualesquiera son disjuntos si no tienen elementos en común. Dos conjuntos son intersecantes si y solo si tienen al menos un elemento común" (Espol, 2008)

1.10.1. Ejemplos.

- ***Ejemplo 1***.

Sean los conjuntos:

$A = \{libro, cuaderno, libreta\}$
$B = \{lapiz, pluma, bolígrafo\}$
Determine sin son conjuntos disjuntos o intersecantes.

U

1. Gráfica.

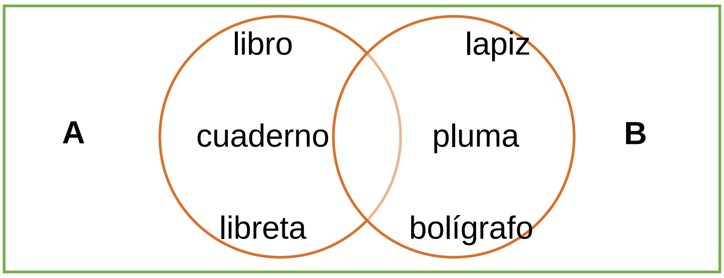


Ilustración 77: Conjunto universo del ejemplo #1

2. Notación matemática.

$$A \cap B = \emptyset$$

3. Interpretación.

Son disjuntos ya que no tienen ni un solo elemento en común.

- **Ejemplo 2**

Determine si D y E sin conjuntos disjuntos o intersecantes.

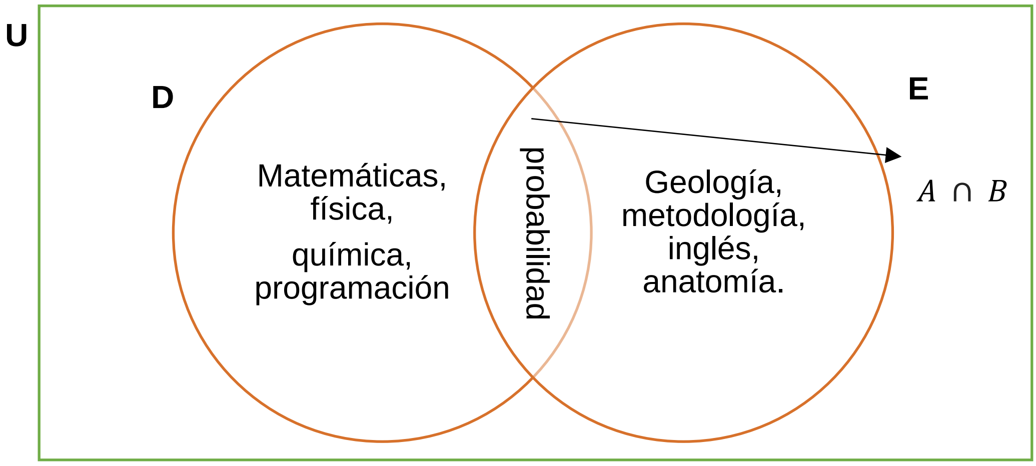


Ilustración 78: Conjunto universo del ejemplo #2

Solución:

$$A \cap B = \{probabilidad\}$$

Son conjuntos intersecantes porque tienen un elemento en común.

- ***Ejemplo 3.***

Sea $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}\ y\ \ B = \{x/x\ es\ número\ primo\}$, determinar si son intersecantes o disjuntos

1. Definimos los conjuntos A y B mediante diagramas de Venn.

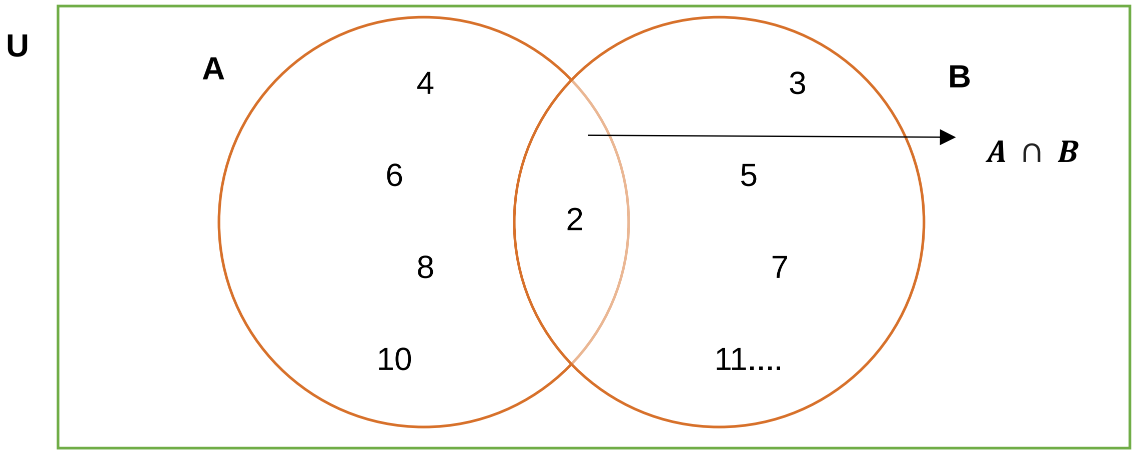


Ilustración 79: Conjunto universo del ejemplo #3

2. Notación matemática.

$$A \cap B = \{2\}$$

3. Interpretación.
   Son conjuntos intersecantes, ya que hay al menos un elemento que los relaciona.

1.11. Operaciones entre conjuntos.

Los conjuntos son una colección ordenada o desordenada de elementos, estos se los puede combinar de varias maneras distintas y por lo tanto se pueden realizar distintas operaciones diferentes las cuales se mencionarán a continuación.

1.11.1. Unión.

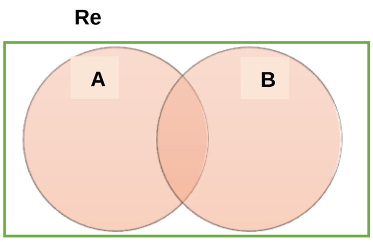


Ilustración 80: Unión de conjuntos (Las regiones pintadas representan la unión)

1.Definición.

- La unión entre dos o más conjuntos es un nuevo conjunto conformado por la agrupación de todos los objetos o elementos de los conjuntos que intervienen. El símbolo es la letra: ∪ . $A \cup B = \{x \,/\, x \in A \text{ o } x \in B\}$

"Esta operación indica la unión de los elementos de dos o más conjuntos, a partir de esto conforman un nuevo conjunto, en el cual los elementos de dicho nuevo conjunto pertenecen a los elementos de los conjuntos originales. Cuando un elemento se repite, forma parte del conjunto unión solo una vez." (Rosen, 2011)

"Es una operación entre dos o más conjuntos, mediante la cual se forma un nuevo conjunto que tiene todos los elementos que pertenecían a uno de los originales. Su símbolo se denota por: ∪." (Ciudad universitaria, 2013)

1.11.1.1. Ejemplos.

- ***Ejemplo 1.***

Sean los conjuntos: $A = \{Amigos\ de\ la\ facultad\}$ $\quad B = \{Amigos\ del\ trabajo\}$ Defina AUB.

$$AUB = \{Amigos\ de\ la\ universidad\ y\ amigos\ del\ trabajo\}$$

Ilustración 81: Amigos - (Ejemplo 1)

- ***Ejemplo 2.***

Si $A = \{c\#,\ C\}\ y\ \ B = \{Python, C\#,\ C++\}$, entonces AUB =?.

Solución:

$$A\ U\ B = \{C\#, C, Python, C++\}$$

Ilustración 82: Programación - (Ejemplo 2)

- ***Ejemplo 3.***

Sea $C\ U\ P = \begin{Bmatrix} Estudiantes\ que\ saben\ programar\ en\ C, \\ Estudiantes\ que\ saben\ programar\ en\ Python \end{Bmatrix}$, defina los conjuntos por separado y grafíquelos en un diagrama de Venn.

1. Definición de conjuntos.

$$C = \{Estudiantes\ que\ saben\ programar\ en\ C\}$$
$$P = \{Estudiantes\ que\ saben\ programar\ en\ Python\}$$

2. Gráfica.

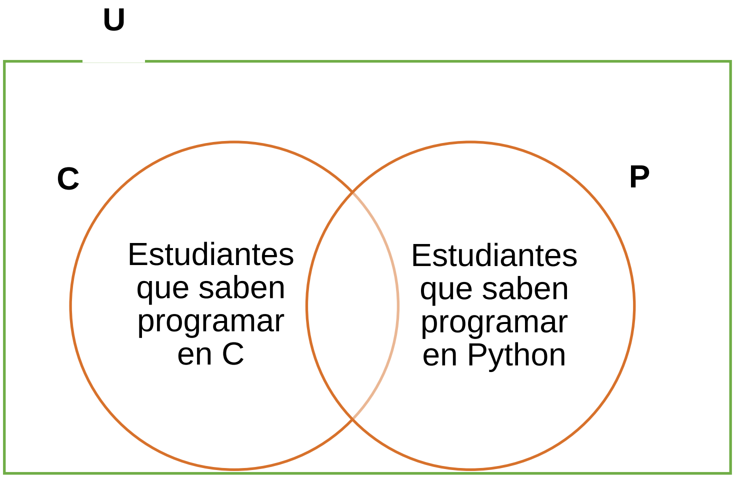


Ilustración 83: Diagrama de Venn ejemplo #3

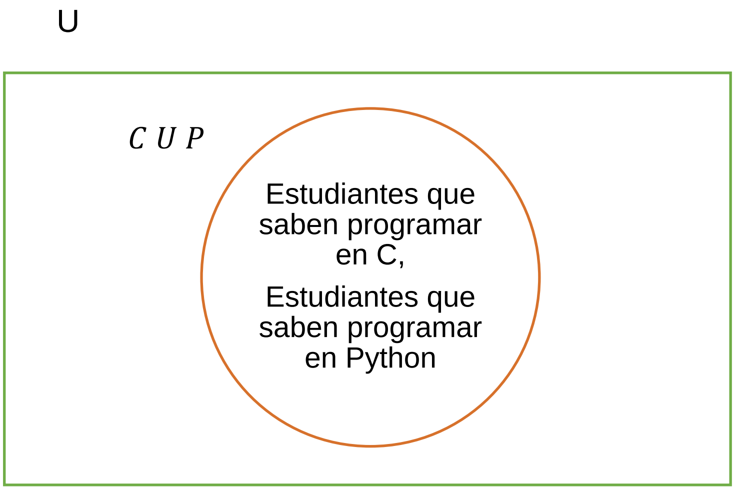


Ilustración 84: Unión de conjuntos - Ejemplo #3

1.11.2. Intersección.

1.Definición.

- La intersección entre dos conjuntos, sean estos A y B, es el conjunto formado por todos los objetos o elementos que pertenecen a los conjuntos A y B a la vez.
  $A \cap B = \{x \,/\, x \in A \; y \; x \in B\}$

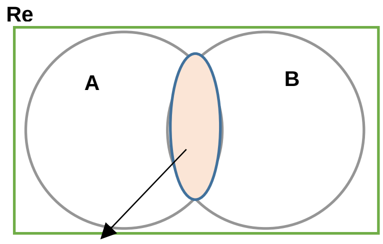


Ilustración 85: Intersección de conjuntos (Las zonas pintadas representan la intersección)

"Su símbolo es: ∩. Sean A y B dos conjuntos cualesquiera, la intersección de ambos $(A \cap B)$ es un nuevo conjunto c el cual esta formado por los elementos que están en a y que están en B." (Rosen, 2011)

"Es una operación entre dos o más conjuntos, mediante el cual se forma un nuevo conjunto que tiene los elementos que pertenecían a la vez a todos los conjuntos originales. Se símbolo se denota por:∩." (Ciudad universitaria, 2013)

1.11.2.1. Ejemplos.

- ***Ejemplo 1.***

Sean los conjuntos: $A = \{x/x\ es\ número\ par\}$ y $B = \{2,5,7,8,9\}$, describa por tabulación $A \cap B$.

1. Definición de conjuntos.

$A = \{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20 \ldots\}$
$B = \{2,5,7,8,9\}$

2. Solución.

$A \cap B = \{2,8\}$

3. Cálculos matemáticos.

$N(A)$: $La\ cardinalidad\ de\ A\ es\ imposible\ de\ calcular\ ya\ que\ es\ un\ conjunto\ infinito.$
$N(B) = 5$
$N(A \cap B) = 2$

4. Gráfica.

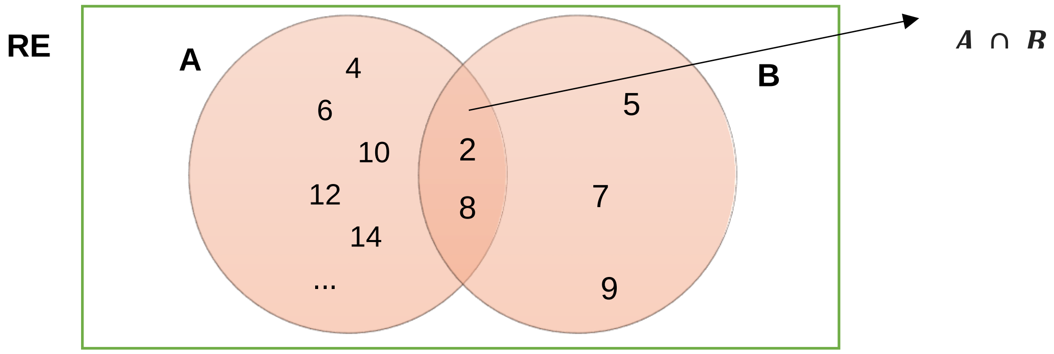


Ilustración 86: Intersección de conjuntos (Ejemplo 1)

5. Interpretación de resultado.

La intersección A y B estará formada por todos los elementos que estén a la vez en los dos conjuntos.

- ***Ejemplo 2***.

Sean:
$A\ =\{x/x\ es\ lenguaje\ de\ programación\}$
$B\ =\{Python, C\#, Word, excel\}$
$C\ =\{Python, C\#, teclado, monitor\}$

Defina $A\cap B\cap C$.

1. Definición de conjuntos.
   $A\ =\{C, C++, C\#, Python, Java, PHP\ \ldots\}$
   $B\ =\{Python, C\#, Word, excel\}$
   $C\ =\{Python, C\#, teclado, monitor\}$

2. Solución del problema.
$$A\cap B\cap C=\{Python, C\#\}$$

3. Cálculos matemáticos.
   $N(A)$: $La\ cardinalidad\ de\ A\ es\ imposible\ de\ calcular\ ya\ que\ es\ un\ conjunto\ con\ elementos\ indefinidos.$
   $N(B)=4$
   $N(C)=4$
$$N(A\cap B\cap C)=2$$

4. Gráfica.

RE

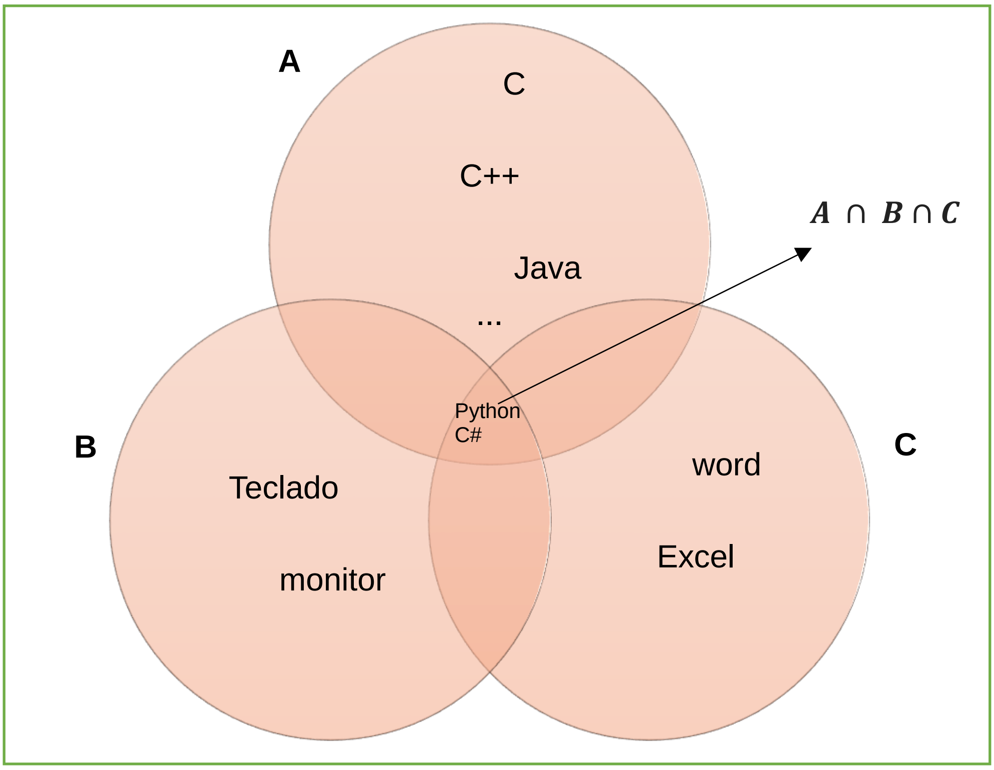


Ilustración 87: Intersección de conjuntos (Ejemplo 2)

5. Interpretación de resultado.
   La intersección A, B y C estará formada por todos los elementos que estén a la vez en los tres conjuntos

- ***Ejemplo 3.***

Sea $C = \{Matemáticas, probabilidad, contabilidad, programación\}$,
$D = \{x/x \text{ es ciencia exacta}\}$. Grafique su intersección.

1. Definición de conjuntos.

$C = \{Matemáticas, probabilidad, contabilidad, programación\}$,
$D = \{Matemática\}$

2. Solución del problema.

$$C \cap D = \{matemáticas\}$$

3. Cálculos matemáticos.
   $N(C) = 4$
   $N(D) = 1$
   $N(C \cap D) = 1$

4. Gráfica.

U

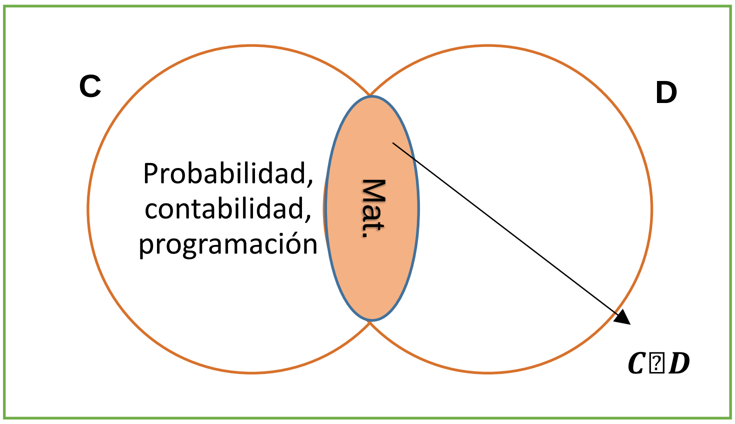


Ilustración 88: Diagrama de Venn (Intersección) - Ejemplo #3

5. Interpretación de resultado.
   La intersección C y D estará formada por todos los elementos que estén a la vez en los dos conjuntos.

1.11.3. Complemento.

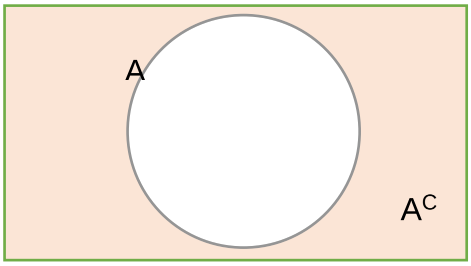


Ilustración 89: Complemento de un conjunto (La región pintada representa A^C)

Definición.

- El complemento de un conjunto A cualquiera es un nuevo conjunto formado por los elementos que corresponden al conjunto universal, pero no al conjunto A. Se símboliza de la siguiente manera: A^C.
  $A = \{x \in U \,/\, x \notin A\}$

"Su símbolo es: $\boldsymbol{A^C}$. Sea ∪ el conjunto universo o referencial $\boldsymbol{Re}$, en donde se hallan todos los elementos o objetos posibles, entonces el complemento de A con respecto a ∪ se obtiene restando a ∪ todos los elementos del conjunto A. $\boldsymbol{A^C}$ =∪ $-A$" (Rosen, 2011)

"Es una operación entre el conjunto universo y de un solo conjunto, mediante el cual se forma un nuevo conjunto que tiene todos los elementos que pertenecen al conjunto universo, pero no al original." (Ciudad universitaria, 2013)

1.11.3.1. Ejemplos.

- ***Ejemplo 1.***

Sea el conjunto universo $U = \{x/x\ es\ número\ par\}$ y $B = \{2,5,7,8,9\}$, describa por tabulaciónB^c.

1. Definición de conjuntos.

$U = \{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20 \ldots\}$
$B = \{2,8\}$

2. Solución del problema.

$$B^c = \{4,6,10,12,14,16 \ldots\}$$

3. Cálculos matemáticos.
   $N(U) = Es\ un\ conjunto\ infinito\ por\ lo\ que\ no\ es\ posible\ calcular\ su\ cardinalidad$
   $N(B) = 2$
   $N(B^c) = Es\ un\ conjunto\ infinito\ por\ lo\ que\ no\ es\ posible\ calcular\ su\ cardinalidad$

4. Gráfica.

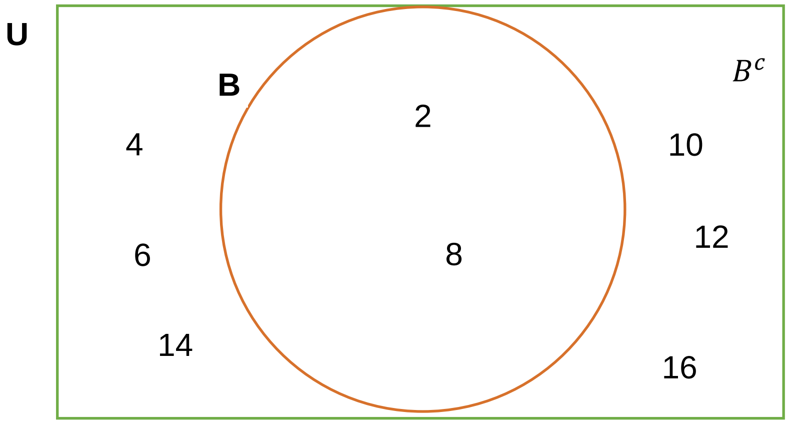


Ilustración 90: Diagrama de Venn del complemento del conjunto B - (Ejemplo 1)

5. Interpretación de resultado.
   El complemento de B estará formado por todos los elementos que estén a fuera de él, es decir, en el conjunto universo.

- ***Ejemplo 2.***

Sean:
El conjunto universo $U = \{x/x\ es\ lenguaje\ de\ programación\}$
$D = \{Python, C\#\}$
Defina D^C

1. Definición de conjuntos.
   $U = \{C, C++, C\#, Python, Java, PHP, Rubi \ldots\}$
   $D = \{Python, C\#\}$

2. Solución del problema.
   $$D^C = \{C, C++, python, java, php, rubi \ldots\}$$

3. Cálculos matemáticos.
   $N(U) = Es\ un\ conjunto\ infinito\ por\ lo\ que\ no\ es\ posible\ calcular\ su\ cardinalidad$
   $N(D) = 2$
   $N(B^c) = Es\ un\ conjunto\ infinito\ por\ lo\ que\ no\ es\ posible\ calcular\ su\ cardinalidad$

4. Gráfica.

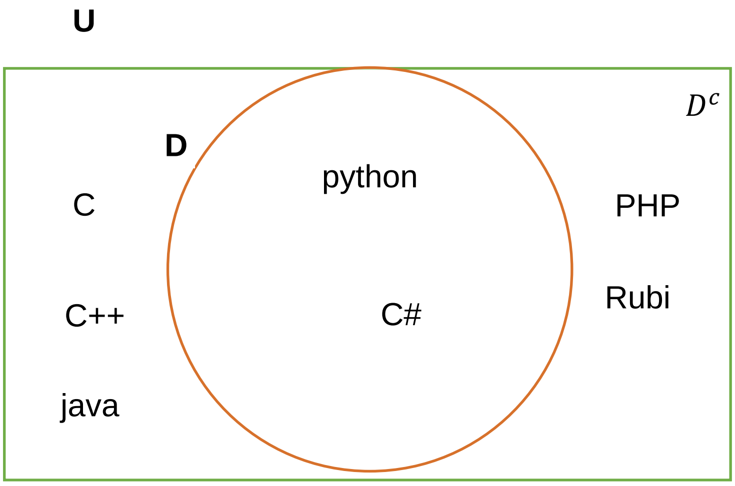


Ilustración 91: Diagrama de Venn del complemento del conjunto D - (Ejemplo 2)

5. Interpretación de resultado.
   El complemento de D estará formado por todos los elementos que estén afuera de él.

➢ ***Ejemplo 3.***
Sea $U = \{Matemáticas, probabilidad, contabilidad, programación\}$,
$F = \{x/x\ es\ ciencia\ exacta\}$. Grafique el complementario de F.

1. Definición de conjuntos.
$C = \{Matemáticas, probabilidad, contabilidad, programación\}$,
$F = \{Matemática\}$

2. Solución del problema.
   $$F^C = \{probabilidad, programación, contabilidad\}$$

3. Cálculos matemáticos.

$N(U) = 4$
$N(F) = 1$
$N(F^c) = 3$

4. Gráfica.

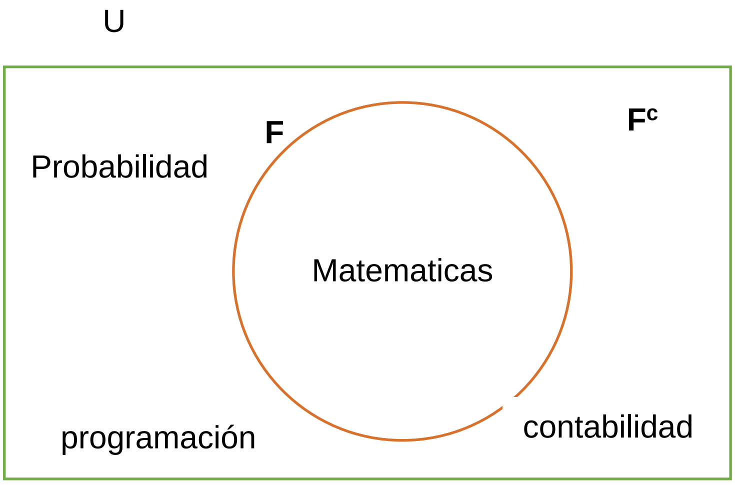


Ilustración 92: Diagrama de Venn - Ejemplo 3

5. Interpretación de resultado.

   El complemento de F estará formado por todos los elementos que estén afuera de él, es decir, en todo el conjunto universo menos F.

1.11.4. Diferencia.

Definición.

- El conjunto diferencia es aquel que está formado solamente por los elementos que forman parte de A pero no de B. Se simboliza de la siguiente manera:($A - B$).
  $A - B\{x/x \in A \wedge x \notin B\}$

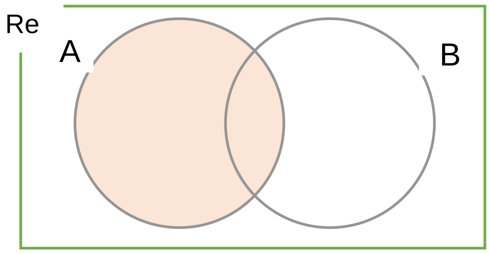


Ilustración 93: Diferencia de conjuntos (A-B)

"Sean A y B dos conjuntos cualesquiera, la diferencia consiste en restar de A todo elemento que esté en B, se puede representar tambien con el símbolo de resta $A - B$, es decir, es un nuevo conjunto que tiene a los elementos que están en A, pero no en B." (Rosen, 2011)

"Es una operación entre dos conjuntos cualesquiera, mediante la cual se forma un nuevo conjunto que tiene todos los elementos que pertenecen al primero, pero no al segundo conjunto. Se denota mediante el símbolo –." (Ciudad universitaria, 2013)

1.11.4.1. Ejemplos.

- ***Ejemplo 1***.

Sea $A = \{x/x \; es \; número \; par\}$ y $B = \{2,4,5,7,8,9\}$, describa por tabulación $A - B$.

1. Definición de conjuntos.

$A = \{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20 \ldots\}$
$B = \{2,4,5,7,8,9\}$

2. Solución del problema.

$$A - B = \{6,10,12,14,16,18,20 \ldots\}$$

3. Cálculos matemáticos.

$N(A) = Es \; imposible \; calcularla \; ya \; que \; es \; un \; conjunto \; infinito$
$N(B) = 6$
$N(B^c) = Es \; imposible \; calcularla \; ya \; que \; es \; un \; conjunto \; infinito$
$N(A - B) = Es \; imposible \; calcularla \; ya \; que \; es \; un \; conjunto \; infinito$

4. Gráfica.

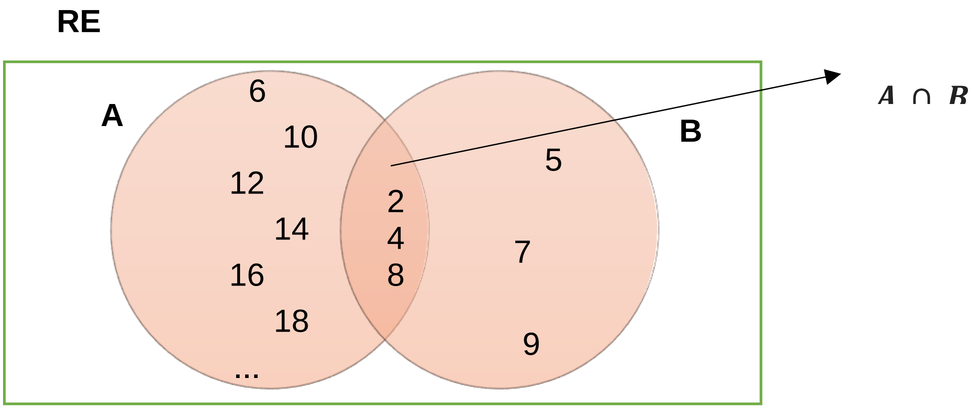


Ilustración 94: Diagrama de Venn de los conjuntos A y B - (Ejemplo 1)

RE

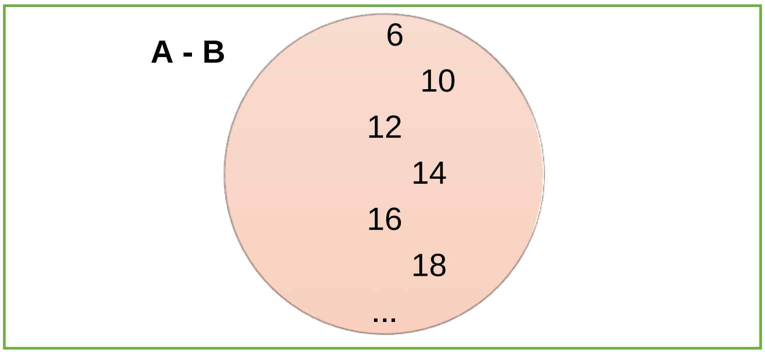


Ilustración 95: Diagrama de Venn del conjunto A-B - (Ejemplo 1)

5. Interpretación de resultado.
   La diferencia de los conjuntos $A - B$ estará formada por todos los elementos que estén en A y no en B.

- Ejemplo 2.

  Sean:
  $A = \{x/x\ es\ lenguaje\ de\ programación\}$
  $B = \{Python, C\#, Word, excel\}$
  Defina $A - B$.

1. Definición de conjuntos
   $A = \{C, C++, C\#, Python, Java, PHP \ldots\}$
   $B = \{Python, C\#, Word, excel\}$

2. Solución del problema.
   $$A - B = \{C, C++, Java, PHP \ldots\}$$

3. Cálculos matemáticos.
   $N(A) = Es\ imposible\ calcularla\ ya\ que\ es\ un\ conjunto\ indefinido$
   $N(B) = 4$
   $N(B^c) = Es\ imposible\ calcularla\ ya\ que\ es\ un\ conjunto\ indefinido$
   $N(A - B) = Es\ imposible\ calcularla\ ya\ que\ es\ un\ conjunto\ infinito$

4. Gráfica.

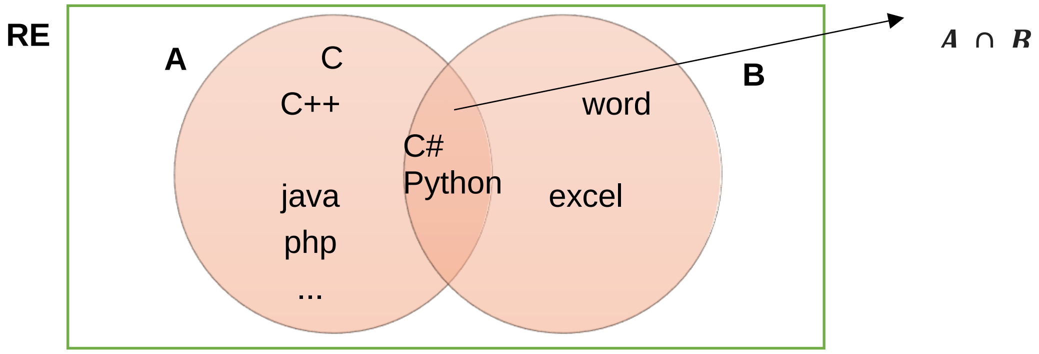


Ilustración 96: Diagrama de Venn de los conjuntos A y B - (Ejemplo 1)

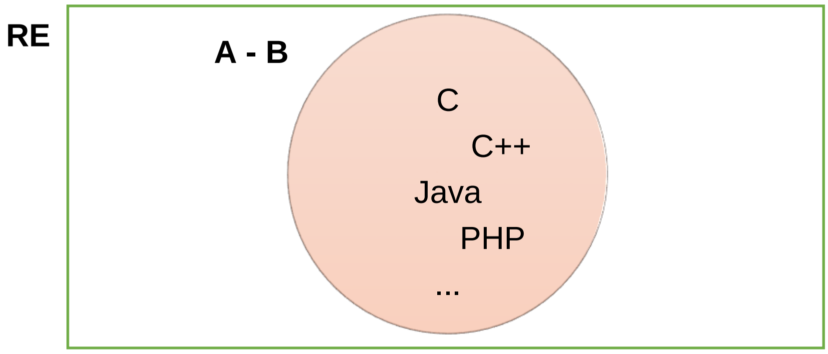


Ilustración 97: Diagrama de Venn del conjunto A-B - (Ejemplo 1)

5. Interpretación de resultado.

   La diferencia de $A - B$ estará formada por todos los elementos que solo estén en A.

- ***Ejemplo 3.***

  Grafique $B - A$
  Sean:

$$A = \{x/x \text{ es un número mayor que } 0\}$$
$$B = \{x/x \text{ es numero menor que } 3\}$$

1. Definición de conjuntos.
   $A = \{1, 2,3,4,5,6,7,8,9,10 \ldots\}$
   $B = \{-1,0,1,2\}$

2. Solución del problema.

$$B - A = \{-1,0\}$$

3. Cálculos matemáticos.
   $N(A) = Es\ imposible\ calcularla\ ya\ que\ es\ un\ conjunto\ indefinido.$
   $N(B) = 4$
   $N(B^c) = Es\ imposible\ calcularla\ ya\ que\ es\ un\ conjunto\ indefinido.$
   $N(B - A) = 2$

4. Grafico.

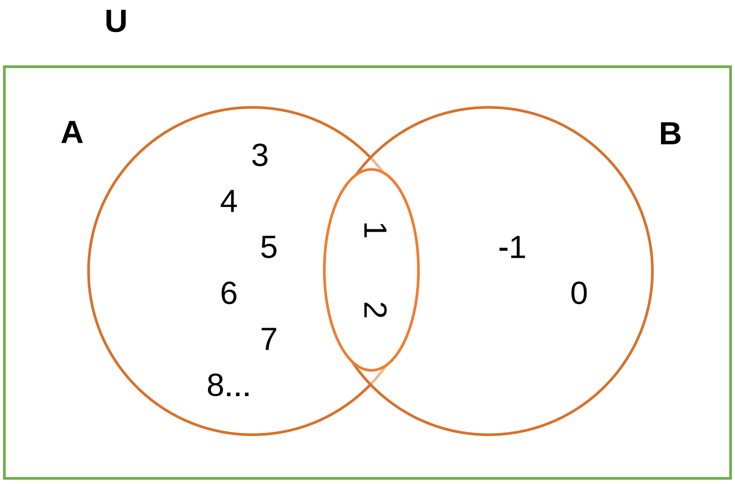


Ilustración 98: Diagrama de Venn - Ejemplo 3

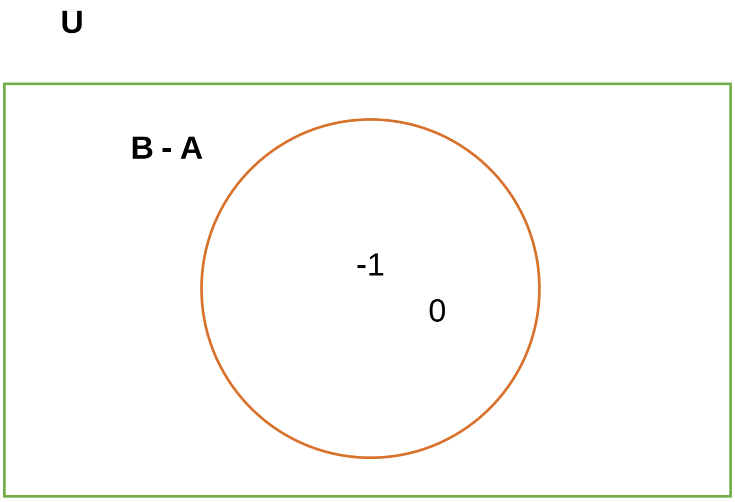


Ilustración 99: Diagrama de Venn - Ejemplo 3

5. Interpretación de resultado.
   La diferencia de $A - B$ estará formada por todos los elementos que solo estén en A.

1.11.5. Diferencia simétrica.

Definición.

- La diferencia simétrica de dos conjuntos $A\ y\ B$ cualesquiera es un nuevo conjunto formado por todos los elementos que corresponden a $A\ o\ B$ pero no a ambos conjuntos. Se simboliza de la siguiente manera: $A\,\Delta\,B$.

"Sean A $y\ B$ dos conjuntos cualesquiera, la diferencia simétrica entre dichos conjuntos es un nuevo conjunto que tiene los elementos que se hallan en A o bien en B, pero no en ambos a la vez." (Rosen, 2011)

"La diferencia simétrica entre los conjuntos $A\ y\ B$ es un conjunto nuevo que se crea por elementos que pertenecen al conjunto A o B pero no a ambos." (Espol, 2008)

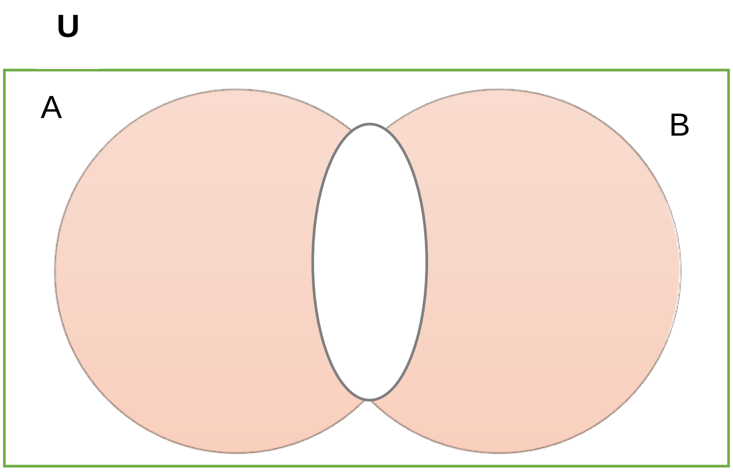


Ilustración 100: Diferencia simétrica A Δ B – Las zonas pintadas de naranja representan la diferencia simétrica

1.11.5.1. Ejemplos.

- ***Ejemplo 1.***

Sean:
$A\ =\ \{x/x\ es\ lenguaje\ de\ programación\}$
$B\ =\ \{Python, C\#, Word, excel\}$
Defina $A\,\Delta\,B$.

1. Definición de conjuntos.
   $A\ =\ \{C, C++, C\#, Python, Java, PHP\}$
   $B\ =\ \{Python, C\#, Word, excel\}$

2. Solución del problema.

$$A \, \Delta \, B = \{C, C++, Java, PHP, word, excel\}$$

3. Cálculos matemáticos.
   $N(A) = 6$
   $N(A^c)$=4
   $N(B) = 4$
   $N(B^c) = 6$
   $N(B - A) = 2$
   $N(A - B) = 4$
   $N(A\Delta B) = 6$

4. Grafico.

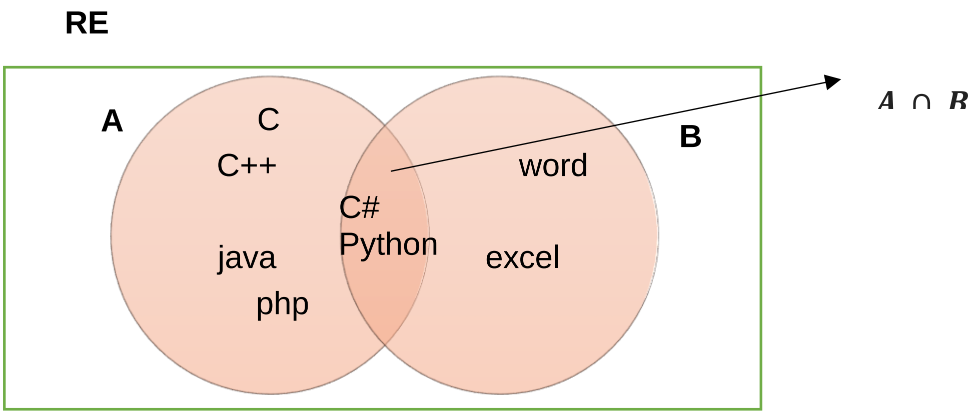


Ilustración 101: Diagrama de Venn de los conjuntos A y B - (Ejemplo 1)

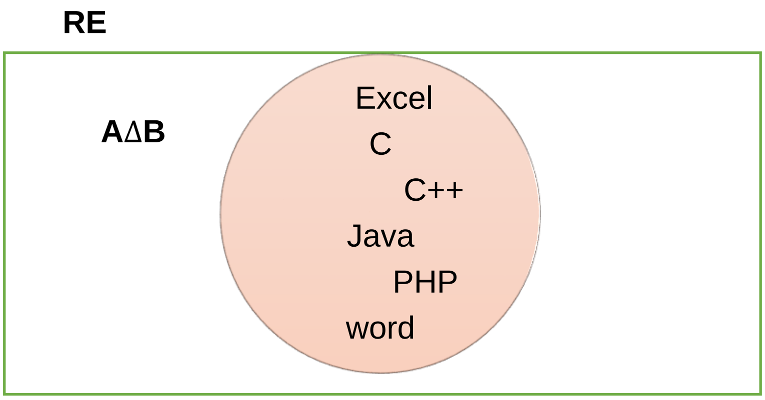


Ilustración 102: Diagrama de Venn del conjunto AΔB - (Ejemplo 1)

5. Interpretación de resultado.
   La diferencia de $A \, \Delta \, B$ estará formada por todos los elementos que estén en A y que estén en B, pero no en ambos, ósea, en su intercepción.

➢ ***Ejemplo 2.***

Dado un conjunto D, conformado por nombres de estudiantes que piensan que Python es más sencillo que C:
$D = \{Kelvin, Pedro, Martha, Karla, Melissa\}$
y un conjunto E constituido por nombres de estudiantes que piensan que C y Python son sencillos:
$E = \{Melissa, Pedro, Martha, Karla, Max, Linger\}$
Calcule de Diferencia Simétrica de $D - E$:

1. Definición de conjuntos.
   $D = \{Kelvin, Pedro, Martha, Karla, Melissa\}$
   $E = \{Melissa, Pedro, Martha, Karla, Max, Linger\}$

2. Solución del problema.

$$D \, \Delta \, E = \{\, Max, Kelvin, Linger\}$$

3. Cálculos matemáticos.
   $N(D) = 5$
   $N(D^c)=$
   $N(E) = 6$
   $N(E^c) =$
   $N(D - E) =$
   $N(E - D) =$
   $N(D \Delta E) = 3$

4. Grafico.

RE

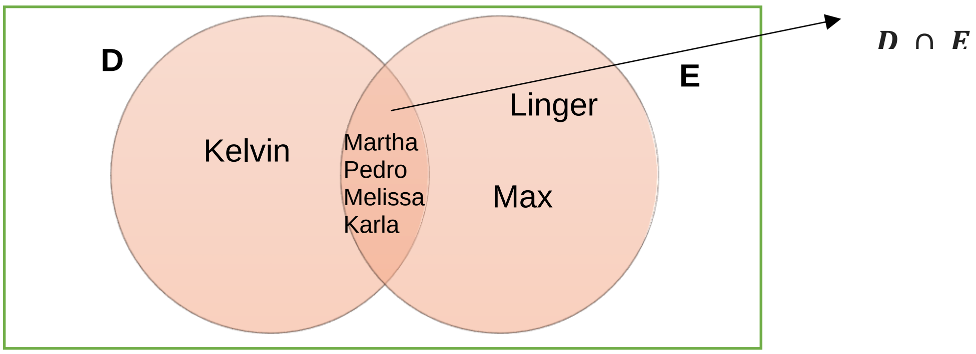


Ilustración 103: Diagrama de Venn de los conjuntos A y B - (Ejemplo 1)

RE

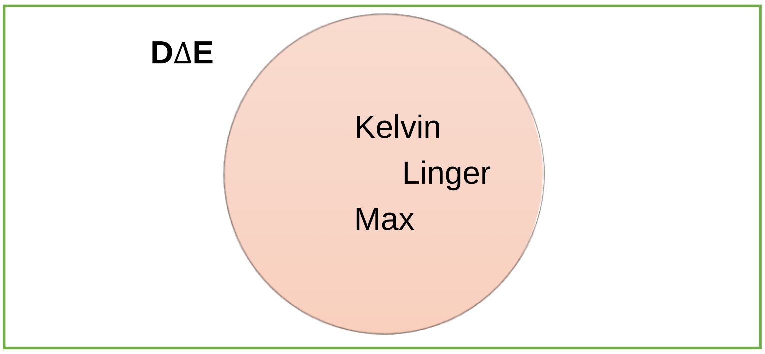


Ilustración 104: Diagrama de Venn del conjunto D∆E - (Ejemplo 1)

5. Interpretación de resultado.
   La diferencia de $D \Delta E$ estará formada por todos los elementos que estén en A y que estén en B, pero no en ambos.

➢ ***Ejemplo 3.***

Sean:

$$A = \{x/x \text{ } es \text{ } un \text{ } número \text{ } mayor \text{ } que \text{ } 0\}$$
$$B = \{x/x \text{ } es \text{ } numero \text{ } menor \text{ } que \text{ } 4\}$$

Grafique $B \Delta A$.

1. Definición de conjuntos.
   $A = \{1, 2,3,4,5,6,7,8,9,10 \dots\}$
   $B = \{-1,0,1,2,3\}$

2. Solución del problema.
   $$B \Delta A = \{-1,0,4,5,6,7,8,9,10 \dots\}$$

3. Cálculos matemáticos.
   $N(A) = Es \text{ } imposible \text{ } calcular \text{ } la \text{ } cardinalidad \text{ } ya \text{ } que \text{ } es \text{ } un \text{ } conjunto \text{ } indefinido.$
   $N(B) = 5$
   $N(B^c) = Es \text{ } imposible \text{ } calcular \text{ } la \text{ } cardinalidad \text{ } ya \text{ } que \text{ } es \text{ } un \text{ } conjunto \text{ } indefinido.$
   $N(A - B) = Es \text{ } imposible \text{ } calcular \text{ } la \text{ } cardinalidad \text{ } ya \text{ } que \text{ } es \text{ } un \text{ } conjunto \text{ } indefinido.$
   $N(B - A) = 2$
   $$N(B\Delta A) = Es \text{ } un \text{ } conjunto \text{ } indefinido.$$

4. Grafico.

RE

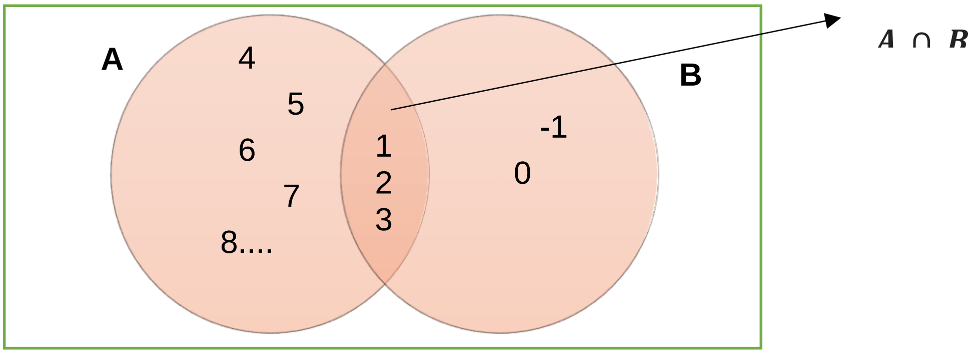


Ilustración 105: Diagrama de Venn de los conjuntos A y B - (Ejemplo 3)

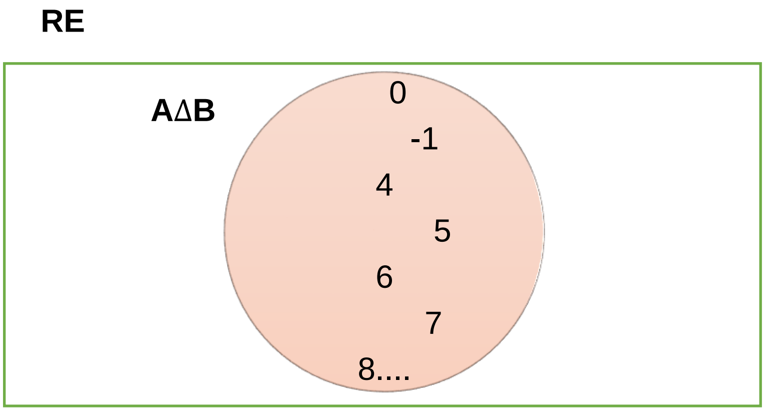


Ilustración 106: Diagrama de Venn del conjunto AΔB - (Ejemplo 3)

5. Interpretación de resultado.
   La diferencia de $B \, \Delta \, A$ estará formada por todos los elementos que estén en B y en A.

1.12. Propiedades de las operaciones entre conjuntos.

Nombre de las propiedades	Unión	Intersección
Idempotencia	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
Asociativa	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
Conmutativa	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Identidad	$A \cup \varphi = A$	$A \cap Re = A$
Absorción	$A \cup Re = Re$	$A \cap \varphi = \varphi$

Tabla 1: Propiedades fundamentales de las operaciones entre conjuntos.

Nombre de las propiedades	Propiedades	
Complementación	$\Phi^C = U$	$U^C = \varphi$
Involutiva	$(A^C)^C = A$	
Distributivas	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	
	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	
De Morgan	$(A \cup B)$ c $= A^c \cap B^c$	
	$(A \cap B)$ c $= A^c \cup B^c$	
De la diferencia	$A - B = A \cap B^c$	
	$A - U = \varphi$	
	$A - \varphi = A$	
	$U - A = A^C$	
	$\varphi - A = \varphi$	
Inclusión	$A \subseteq A$	
	$\varphi \subseteq A$	
	$A \subseteq U$	
	$A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$	
	$A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$	
Reglas de conteo	$\lvert A \cup B \cup C\rvert = \lvert A\rvert + \lvert B\rvert + \lvert C\rvert - \lvert A \cap B\rvert - \lvert B \cap C\rvert - \lvert C \cap A\rvert + \lvert A \cap B \cap C\rvert$	
	$\lvert A \cup B\rvert = \lvert A\rvert + \lvert B\rvert - \lvert A \cap B\rvert$	
	$\lvert A \cup B\rvert = \lvert A - B\rvert + \lvert A \cap B\rvert + \lvert B - A\rvert$	
	$\lvert A\rvert = \lvert A - B\rvert + \lvert B \cap A\rvert$	

Tabla 2: Otras propiedades de las operaciones entre conjuntos

1.13. Cardinalidad de conjuntos por diagramas de Venn.

Es posible determinar la cardinalidad de cualquier conjunto de elementos o objetos los cuales sean contables mediante operaciones de cardinalidad.

1.13.1. Ejercicios.

➢ **Ejemplo 1.**

Determine el porcentaje de alumnos que practican los siguientes lenguajes de programación C y Python, si al entrevistar a 1000 estudiantes se obtuvieron los siguientes resultados.

500 estudiantes practican C
600 estudiantes practican Python
150 no practican C ni Python

$N(Re) = 1000$

$N(C) = 500$

$N(P) = 600$

$N[\,Re - (CUP)] = 150$

Calculando la cardinalidad de la unión entre estos dos conjuntos se obtiene:
$N(C\ U\ P) = N(C) + N(P) – N(C \cap P)$

$N(C\ U\ P) = 1000 – 150 = 850$

Calculando la cardinalidad de la intersección entre estos dos conjuntos se obtiene:

$$N(C\ U\ P) = N(C) + N(P) – N(C \cap P)$$

Despejando tenemos:
$N(C \cap P) = N(C) + N(P) – N(C\ U\ P)$

$$N(C \cap P) = 600 + 500 – 850 = 250$$

Ilustrándolo en un diagrama de Euler-Venn

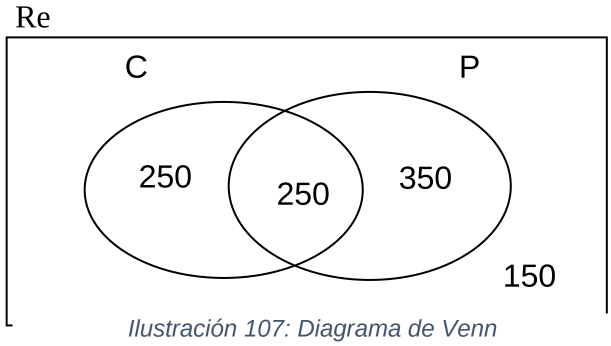


Ilustración 107: Diagrama de Venn

- **Ejemplo 2.**

  En el curso 3-2 de la carrera de ingeniería en sistemas, de la universidad de Guayaquil, hay 45 alumnos, a 20 alumnos les gusta Calculo III, a 30 alumnos les gusta probabilidad y estadística y a 10 les gustan ambas asignaturas. Determine $(C \cup P)^C$

  1. Definición de conjuntos.
     Sean los conjuntos:
     $U = \{x/x\ estudiantes\ del\ curso\ 3-2\ de\ la\ carrera\ de\ ing.en\ sistemas\}$
     $C = \{x/x\ le\ gusta\ calculo\ III\}$
     $P = \{x/x\ le\ gusta\ probabilidad\ y\ estadística\}$

  2. Definiciones matemáticas.

$N(C) = 20$
$N(P) = 30$

$N(C \cap P) = 10$
$N(C - P) = 10$
$N(P - C) = 20$

3. Solución
   Sabiendo que: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

   Entonces:

$$N(C \cup P) = 20 + 30 - 10 = 40$$

$$N(C \cup P)^C = 5$$

4. Gráfica.

Re

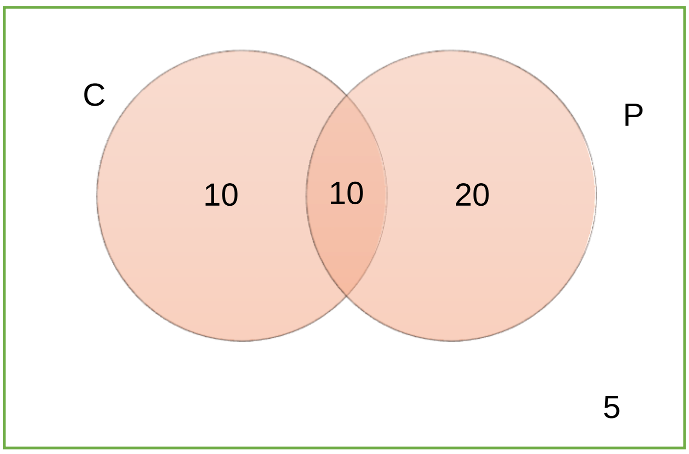


Ilustración 108: Diagrama de Venn (Ejemplo 2)

- **Ejemplo 3.**

En la facultad de ingeniería industrial se realizó una encuesta a 200 personas para saber que lenguaje de programación preferían para aprender al inicio, se obtuvo:
50 prefieren C; 65 prefieren C#; 77 prefieren Python; 100 prefieren C o C#; 105 prefieren C# O Python; 110 prefieren C o Python; 10 personas prefieren C y Python, pero no C#.
Determine la cardinalidad de $(C \cap C\# \cap P)$

Re

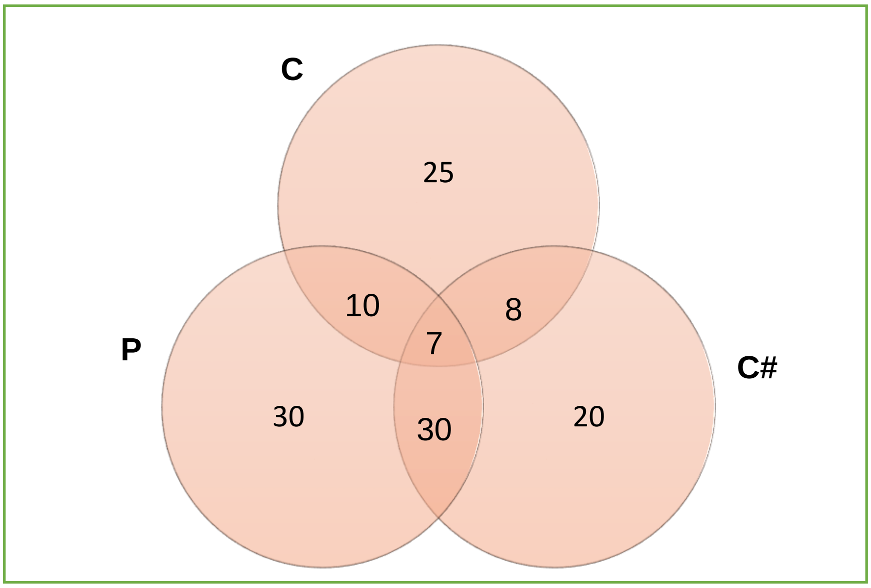


Ilustración 109: Diagrama de Venn (Ejemplo 3)

1. Definiciones matemáticas.

$$N(C \cup P) = N(C) + N(P) - N(C \cap P)$$
$$110 = 50 + 77 - \ N(C \cap P)$$
$$N(C \cap P) = 50 + 77 - 110$$
$$N(C \cap P) = 17$$

$$N(C\# \cup P) = N(C\#) + N(P) - N(C\# \cap P)$$
$$105 = 65 + 77 - \ N(C\# \cap P)$$
$$N(C\# \cap P) = 65 + 77 - 105$$
$$N(C\# \cap P) = 37$$

$$N(C \cup C\#) = N(C) + N(C\#) - N(C \cap C\#)$$
$$100 = 50 + 65 - \ N(C\# \cap P)$$
$$N(C \cap C\#) = 50 + 65 - 100$$
$$N(C \cap C\#) = 15$$

2. Solución

$$N(C \cap C\# \cap P) = 7$$

1.14. Ejercicios propuestos.

Ejercicio 1: Dado los siguientes conjuntos:

$A = \{*\}$
$B = \{x/x\ es\ par, impar\ y\ primo\ a\ la\ vez\}$
$C = \{a, b, c, d, e, f, g\}$

$D = \{x/x\ es\ número\ de\ granos\ de\ arena\ de\ la\ playa\}$
Determine qué clase de conjuntos relevantes son.

Ejercicio 2: Sea el conjunto universo $Re = \{2,6,7,10,11,12,14,15,16,17,18,20\}$ y el conjunto $a = \{x/x\ es\ número\ par\}$ formado por elementos del conjunto referencial. Determine A^C.

Ejercicio 3: Justificar que el conjunto
$B = \{\ ing. En\ sistemas, ing. En\ teleinformática, ing. Civil, ing. Networking\}$ no es subconjunto de $C = \{x/x\ es\ rama\ de\ la\ medicina\}$.

Ejercicio 4: Define por extensión cada uno de los siguientes conjuntos:

a) {x / x es un número entero que verifica 4 < x < 8}
b) {x / x es entero positivo múltiplo de 7}
c) {x ∈ ℝ/(3x+2) (x+3) =0}

Ejercicio 5: En el conjunto formado por todos los números naturales menores que 100, decir Cuántos números hay que no son múltiplos ni 3 ni de 4.

Ejercicio 6: Cuáles de los siguientes conjuntos son vacíos, unitarios, finitos o infinitos

d) A = {x / x es día de la semana}
e) G = {1, 3, 5, 7, 9, ...}
f) I= {x / x es un satélite}
g) H= {x / x 10,20,30,40,50,60,70,80,90}

Ejercicio 7: Se hizo una encuesta a 200 desarrolladores acerca del lenguaje de programación donde preferían hacer sus proyectos y se obtuvo los siguientes resultados:

170 programaban en C
90 programaban en PHP
100 programaban en Python
20 programaban en c y PHP
18 programaban en PHP y Python
70 preferían programar en c y Python, pero no en PHP.

Determine el número de personas que no prefieren estos lenguajes.

Ejercicio 8: Se preguntó a 50 alumnos de la carrera de ingeniería en teleinformática de la universidad de Guayaquil sobre el tiempo que tarda en entender una nueva clase de programación c, obteniendo los siguientes resultados: 20 estudiantes tardan de 1 a 2 días, 12 tardan de 2 a 4 días y 5 a 6 días, 10 no tardan nada en entender una nueva clase.

Con estos datos averiguar:

- El número de alumnos que tarda en entender una nueva clase de 5 a 6 días.
- El número de alumnos que solo tardan de 5 a 6 días.

- El número de alumnos que tardan de 1 a 2 días, de 2 a 3 días, y de 5 a 6 días en entender nueva clase.

Ejercicio 9: Determinar la diferencia en los siguientes conjuntos:

Sean:

S = {a, b, c, d}

T = {f, b, d, g}

A = {1, 2, 3, 4,5,6}

B = {4, 5, 8, 10,12}

Ejercicio 10: Se dice que 420 personas ven los canales D, E o F ,120 ven el canal D, 220 ven el canal E Y 110 no ven el canal F, los que ven por lo menos 2 canales son 130 ¿cuántos ven los tres canales?

Ejercicio 11: Dados los siguientes conjuntos, represente mediante un Diagrama de Venn la solución a cada operación de conjuntos e indique qué elementos forman la solución.

U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13}

A = {4, 8, 11,14}   B = {4, 8, 12, 16, 20}

C = {1, 2, 3, 10, 12, 15}   D = {1, 4, 6, 7, 17}

a) $A \cup B$
b) $B \cup C$
c) $E´ \cap D$
d) $A \cup C$
e) $(A \cap D)´$

Ejercicio 12: Se pregunta a 11 estudiantes de la carrera de licenciatura en sistemas de información de la universidad de Guayaquil acerca de sus preferencias en reemplazar el lenguaje de programación c con el lenguaje de programación Python. Se obtuvieron los siguientes resultados: 7 si prefirieron el reemplazo de lenguaje de programación c por el lenguaje Python, el número de estudiantes que prefirieron el reemplazo de los lenguajes fue igual al número de estudiantes que no prefirió ninguno de las dos opciones, 3 estudiantes manifestaron que no prefieren el reemplazo del lenguaje c por el lenguaje Python. Se desea saber

- ¿Cuántos estudiantes si prefieren el reemplazo del lenguaje c por el lenguaje Python?
- ¿Cuántos estudiantes prefieren continuar con el lenguaje de programación c?
- ¿Cuántos estudiantes manifestaron que les era indistintos el reemplazo de ambos lenguajes de programación?

Ejercicio 13: Se preguntó a un grupo de 10 de la facultad de ingeniería industrial mencionando cuál de dos bloques se le hizo más fácil y sencillo de analizar: bloque 1 y bloque 2.

```
n = int(input("Ingrese un numero positivo: "))
```

BLOQUE 1

```
int n;
printf("Ingrese un numero positivo: ");
scanf("%d,&n");
```

BLOQUE 2

Y se obtuvieron los siguientes resultados: todos eligieron que prefieren uno de los bloques, 3 estudiantes manifiestan que prefieren el bloque 1 pero no el bloque 2, 6 estudiantes dijeron que no prefieren el bloque 2. Se desea saber:

- ¿Cuántos de los encuestados eligieron el bloque 2?
- ¿Cuántos de los encuestados eligieron el bloque 1?
- ¿Cuántos de los encuestados eligieron los dos bloques?

Ejercicio 14: Se hizo una encuesta entre mil estudiantes de la universidad de Guayaquil para determinar cuál es la operación que realiza todo el bloque 1 y 2. 400 respondieron que calcula la factorial de un número, 300 respondieron solo validan que se cumpla una condición. De las cantidades anteriormente mencionadas, 275 corresponde al número de estudiantes que realiza ambas operaciones para llegar al mismo resultado en los dos bloques de código.

- ¿Cuántos alumnos encuestados decidieron que la operación que realiza es de calcular factorial de un número?
- ¿Cuántos alumnos entrevistados eligieron la operación sólo validan que se cumpla una condición?
- ¿Cuántos alumnos encuestados no eligen ninguna de las operaciones?

Ejercicio 15: En una encuesta que se realiza a la universidad de Guayaquil 100 estudiantes obtienen los siguientes puntajes estimados durante los primeros meses de estudio de programación en c, de los cuales 65 obtuvieron el puntaje de 2 a 3 puntos, 25 estudiantes obtuvieron de 4 a 5 puntos y de 2 a 3 puntos, y 15 estudiantes obtuvieron de 0 a 1 punto.

- ¿Qué estudiantes obtuvieron ninguno de los dos puntajes mencionados?

Ejercicio 16: De un total de 60 alumnos de primer semestre de la carrera de ingeniería en teleinformática de la facultad de ingeniería industrial de la universidad de Guayaquil, 15 determinan que la operación es crea una función que retorna la suma de dos números, 11 determinan que la operación es crea una función que retorna la suma de dos números y declara e inicializa valores de una variable, 12 repite mientras se cumple la condición n<0, 8 determinan que la operación es crea una función que retorna la suma de dos números y repite mientras se cumple la condición n<0, 10 determinan que declara e inicializa valores de una variable, 5 determina que declara e inicializa valores de una variable y repite mientras se cumple la condición n<0, y 3 indica que realiza las 3 operaciones.

Determina:

- ¿Cuántos no escogen ninguna de las opciones?
- ¿Cuántos indican que la operación se repite mientras se cumple la condición n<0?
- ¿Cuántos indican que no es la operación que declara e inicializa valores de una variable y repite mientras se cumple la condición n<0?
- ¿Cuántos indican que la operación es crear una función que retorna la suma de dos números?

Ejercicio 17: Se preguntó a unos cuantos estudiantes de la universidad de Guayaquil sobre la metodología de enseñanza de la materia de programación es la correcta. Y se obtuvieron los siguientes resultados: 48 están parcialmente de acuerdo, 40 le es indiferente, 34 están parcialmente en desacuerdo, 25 están parcialmente de acuerdo y le es indiferente, 14 le es indiferente y están parcialmente en desacuerdo, 23 están parcialmente de acuerdo y parcialmente en desacuerdo y 3 de los estudiantes eligieron las 3 opciones. Se pide:

- Ilustrar el problema con un diagrama de venn el número de estudiantes encuestados.
- ¿Cuántos de los estudiantes eligieron sólo una de las 3 opciones (parcialmente de acuerdo, indiferente, y parcialmente en desacuerdo)?

Ejercicio 18: Se llevó a cabo una investigación a mil estudiantes de la universidad de Guayaquil en la facultad de ingeniería industrial determinar si el estudiante se percató que los bloques de código número 1 están programado en lenguaje Python, 300 si se percataron del lenguaje utilizado. De las cantidades anteriormente mencionadas, 275 estudiantes no se percataron del lenguaje usado en los bloques número 1.

- ¿Cuántos estudiantes encuestados si se percatan que los bloques de código número 1 están programado en lenguaje c?
- ¿Cuántos estudiantes encuestados no se percatan que los bloques de código número 1 están programado en lenguaje c?
- ¿Cuántos estudiantes encuestados no escogen ninguna de las opciones?

Ejercicio 19: Se realiza una encuesta a 11 estudiantes de la carrera de ingeniería en teleinformática de la universidad de Guayaquil sobre los dos resultados de código se le hizo más fácil y sencillo de analizar y llegar al resultado:

Bloque 1

```
Def fact_1 (n):
    Total = 1
    While n > 1:
        total *= n
        n-= 1
    return total
```

Bloque 2

```
Int fact_1 (n) {
    Int total;
    while (n >1) {
        total*= n;
            n-=1; }
    return total;}
```

El número de estudiantes que prefirieron uno solo de los bloques de código fueron 7, el número de los estudiantes que prefirieron ambos bloques fue igual al número de estudiantes que no eligieron ninguno de los dos bloques, el número de los estudiantes que no prefirieron el bloque 1 y prefirieron el bloque 2 fueron 3. Se desea saber:

- ¿Cuántos estudiantes prefieren el bloque de código número 1?
- ¿Cuántos estudiantes prefieren solamente el bloque de código número 2?
- ¿Cuántos estudiantes prefieren ambos bloques de código?

Bibliografía

Ciudad universitaria, D. (2013). Comparacion entre conjuntos. En Apuntes para la asignatura matemáticas básica (pág. 18).

Córdoba, & Fernández, F. V. (2017). Teoría de conjuntos. Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.

Culquichicón, S. E. (2010). Conjuntos.

Espinosa, D. J. (2009). dgenp.

Espol, I. (2008). Lógica y conjuntos. En Fundamentos de matemáticas (pág. 40).

Ivorra, & Carlos. (2010). Lógica y teoría de conjunto.

Jech, T. (2013). Filters, Ultrafilters and Boolean Algebras. En Set Theory. Springer Monographs in Mathematics.

Jiménez, J. A. (2010). Curso práctico de teoría de conjuntos.

mendoza, E. b. (2014). Teoría de conjuntos.

Pérez, G., & Caludia. (2013). Teoría de Conjuntos.

Rodriguez, R. J. (2010). Probayes. México.

Rosen, K. H. (2011). Operaciones entre conjuntos. En Matemáticas Discretas y sus Aplicaciones.

Takeyas, I. B. (2013). itnuevolaredo.

Zalta, E. N., & Nodelman, U. (2013). Diagrams. New York.

CAPITULO 2

TÉCNICAS DE CONTEO

Introducción

Ilustración 110: Técnicas de conteo

Muchas veces en nuestra vida diaria se presentan situaciones en las que hay cálculos difíciles de realizar a simple vista o mentalmente y pues es necesario acudir a computadoras o máquinas para que hagan ese trabajo por nosotros.

Por lo general, siempre nos vamos a encontrar con algún tipo de problema, los cuales se nos pueden presentar en distintos campos como medicina, ingeniería, industrias, ciencias, etcétera. Los problemas representativos en estas áreas predican la predicción de lo que sucederá en circunstancias donde se incluye elementos conocidos (o mesurables) y aleatorios. En este capítulo hablaremos sobre las técnicas de conteo, las cuales nos son de mucha utilidad en nuestra vida diaria.

Contenido.

- Técnicas de conteo.
- Principio aditivo.
- Regla multiplicativa.
- Resolución por diagrama de árbol.
- Factorial de un número.
- Combinaciones.
- Permutaciones.

2. Técnicas de conteo.

Ilustración 111:Técnicas de

1.Definición.

- Las técnicas de conteo sirven para hacer sencilla la enumeración de posibles resultados de un determinado evento complejo de cuantificar.

"Las técnicas de conteo son usadas para enumerar los eventos con un gran número de posibles resultados que serían tediosos listar y cuantificar." (Ramirez, 2012)

"Las técnicas de conteo son aquellas herramientas usadas para facilitar la enumeración de eventos difíciles de contar." (Reynoso, 2015)

2.1. Principio aditivo.

1.Definición.

- Sea A, una suceso que cuentan con m, n y w formas distintas, de ser realizado y teniendo en cuenta que los eventos no pueden realizarse juntos, entonces el suceso A se realizará de $(m + n + w\ )$ formas distinas.

Ilustración 112: Principio aditivo

"Al realizarse una actividad que tiene varias alternativas para ejecutarse, donde la primera de esas alternativas puede ser realizada de M maneras, la segunda de N maneras y la última puede ser realizada de W maneras, entonces las opciones se calculan: $PA = [m + n + w\ \ldots]\ maneras$. " (Sanchez, 2016)

"Conjeturemos que un evento A se puede realizar de m maneras distintas y otro evento B de n maneras distintas, de tal manera que ambos eventos no se den juntos, entonces el evento A o B se realizara de $(A + B)$ maneras distintas." (Instituto de ciencias matemáticas, 2006)

2.1.1. Ejemplos.

- ***Ejemplo 1***
  En la facultad de Carrera de ingeniería en sistemas se imparten 3 cursos distintos de programación, 3 cursos distintos de matemáticas y 3 cursos distintos de estadística. ¿De cuántas maneras un estudiante puede escoger uno de los cursos?

Ilustración 113: Estudiante pensando - (Ejemplo 1)

$3 + 3 + 3 = 9$ maneras.

- ***Ejemplo 2.***

  Un medicamento se vende en 2 locales de Perú y en 3 locales de Ecuador. Si se puede obtener estos medicamentos en Ecuador y Perú. ¿De cuántas maneras se puede comprar la medicina?

  Por el principio aditivo: $2 + 3 = 5$ maneras.

Ilustración 114: Medicamentos - (Ejemplo 2)

- ***Ejemplo 3.***

  En una universidad se enseñan 2 lenguajes de programación sencillos, 3 complejos y 2 intermedios. ¿De cuántas maneras los estudiantes pueden adquirir conocimiento en los distintos lenguajes de programación?

Ilustración 115: Universidad - (Ejemplo 3)

Por el principio aditivo: $2 + 3 + 2 = 7$

2.2. Regla multiplicativa

Ilustración 116: Regla multiplicativa

1.Definición.

- Sean A y B dos eventos que pueden ser realizados en forma independiente de m y n maneras distintas, respectivamente, entonces ambos eventos pueden darse de $(m * n)$ maneras distintas.

"Conjeturemos que un evento X se da en m maneras, aparte de este evento, hay un segundo evento Y que puede ocurrir en n maneras. Entonces la combinación de X y Y ocurre en $(m\ x\ n)$ maneras distintas." (Lipson & Lipschutz, 2009)

"Un suceso puede realizarse en $x1$ maneras distintas y un segundo suceso puede llevarse a cabo de $x2$ maneras distintas, y así sucesivamente, entonces el número de maneras distintas en que puede realizarse el experimento es: $(x1 * x2 * \ldots)$." (Flores, 2012)

2.2.1. Ejemplos.

- ***Ejemplo 1.***
  Dos estudiantes de ingeniería en sistemas están en la biblioteca estudiando programación y hay 7 libros sobre el tema ¿De cuántas maneras pueden estudiar si cada uno debe estudiar en un libro diferente para concentrarse mejor?

1. Análisis.
   El primer estudiante puede escoger cualquiera de los 7 libros y el segundo tendrá 6 para estudiar, ya que debe estudiar en uno diferente.

Ilustración 117: Estudiantes - (Ejemplo 1)

2. Solución.
   El número de maneras en que pueden estudiar es de: $7 * 6 = 42$ maneras.

- ***Ejemplo 2.***
  En la carrera de ingeniería en teleinformática hay 4 profesores (uno en un curso distinto) que dan programación I y matemáticas I ¿De cuántas maneras puede un grupo de estudiantes ver programación y matemáticas en un curso distinto?

1. Análisis.
   Un grupo de estudiantes pueden ver programación I con cualquiera de los 4 profesores, pero para ver matemáticas solo lo puede hacer con 3 de los restantes.

Ilustración 118: Profesores - (Ejemplo 2)

2. Solución.
   $4 * 3 = 12$ posibles formas.

- ***Ejemplo 3.***
  En una estantería hay una caja con 4 libros de programación, dos de C y 2 de Python y se extraen 3 libros de uno en uno ¿Cuántas formas hay de seleccionar los libros?

1. Análisis.
   Al extraer el primer libro puede extraerse de 4 maneras, pero al extraerse el segundo son 3 maneras ya que solo quedan esas 3 opciones, al extraer el tercero solo quedan de 2 maneras.

2. Solución.
   $4 * 3 * 2 = 24$ posibles formas.

Ilustración 119: Estantería con libros - (Ejemplo 3)

2.3. Resolución por diagrama de árbol.

1.Definición.

- Un diagrama de árbol permite la representación gráfica de todos los arreglos o posibles soluciones que se pueden formar con los elementos pertenecientes a un conjunto, el cual tiene una serie de maneras de realizarse. En la imagen podemos ver al conjunto X el cual tiene 2 posibilidades de poder ser resuelto $A1, A2$. La siguiente rama consta de eventos distintos, $B1, B2$ que se realizan después de ocurrir $A1$.

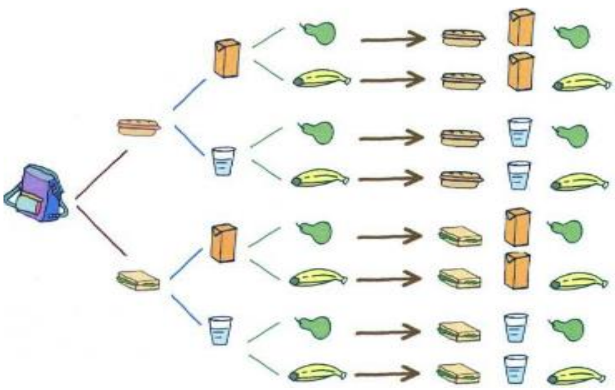


Ilustración 120: Ejemplo de diagrama de árbol

"Es la representación gráfica de un caso que consta de varios eventos, donde cada uno de los eventos tiene un número cuantificable de formas de ser darse." (Ramirez, 2012)

"El diagrama de árbol es la representación gráfica de un experimento que tiene n pasos, donde cada paso tiene un número finito de maneras de realizarse." (Reynoso, 2015)

2.3.1. Ejemplos.

➢ ***Ejemplo 1.***

Un estudiante de ingeniería en sistemas diariamente estudia programación en C y en Python, al ir a una biblioteca encuentra que hay 3 libros de programación en C y 2 en

Python. Grafique mediante diagrama de árbol de cuantas maneras el estudiante puede escoger libros para estudiar

1. Análisis.
   Se sabe que el estudiante a diario estudia programación en C y Python y tiene a su disposición 3 libros de programación en C y 2 de programación en Python, pero no puede estudiar ambos a la vez.

2. Solución

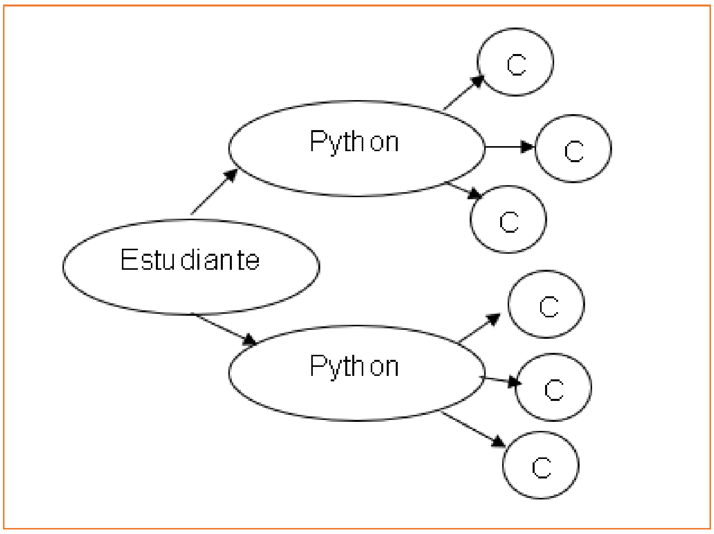
$$3\ libros\ C\ x\ 2\ libros\ Python\ =\ 6\ maneras.$$

3. Interpretación.

1er libro de Python	1er libro de C	1^{era} forma
1er libro de Python	2do libro de C	2da forma
1er libro de Python	3er libro de C	3^{era} forma
2do libro de Python	1er libro de C	4ta forma
2do libro de Python	2do libro de C	5ta forma
2do libro de Python	3er libro de C	6ta forma

4. Gráfica.


Ilustración 121: Estudiantes - (Ejemplo 1)



- ***Ejemplo 2.***
  En la facultad de ingeniería industrial de la universidad de Guayaquil hay 3 carreras: ingeniería en teleinformática, licenciatura en sistemas de información e ingeniería industrial. El número de estudiantes de la facultad se divide en: la
  primera el 30%, la segunda él %30 y la última él %40. Los hombres están repartidos de manera uniforme, siento el 70% del total de cada carrera. Cuál sería el porcentaje

de posibilidad de poder encontrar a un hombre en la carrera de ingeniería en teleinformática.

1. Análisis.
   Se sabe que en la facultad hay tres carreras y sus estudiantes se distribuyen el 30% en teleinformática, 30% Lic. En sistemas de información y el 40% en industrial, a lo cual, completan el 100%. Y que en cada facultad el 70% son hombres, por ende, el 30% son mujeres.

2. Solución.

$$0.30 * 0.70 = 0,21$$
$$0,21 * 100 = 21\% \ de\ posibilidades$$

3. Gráfica.

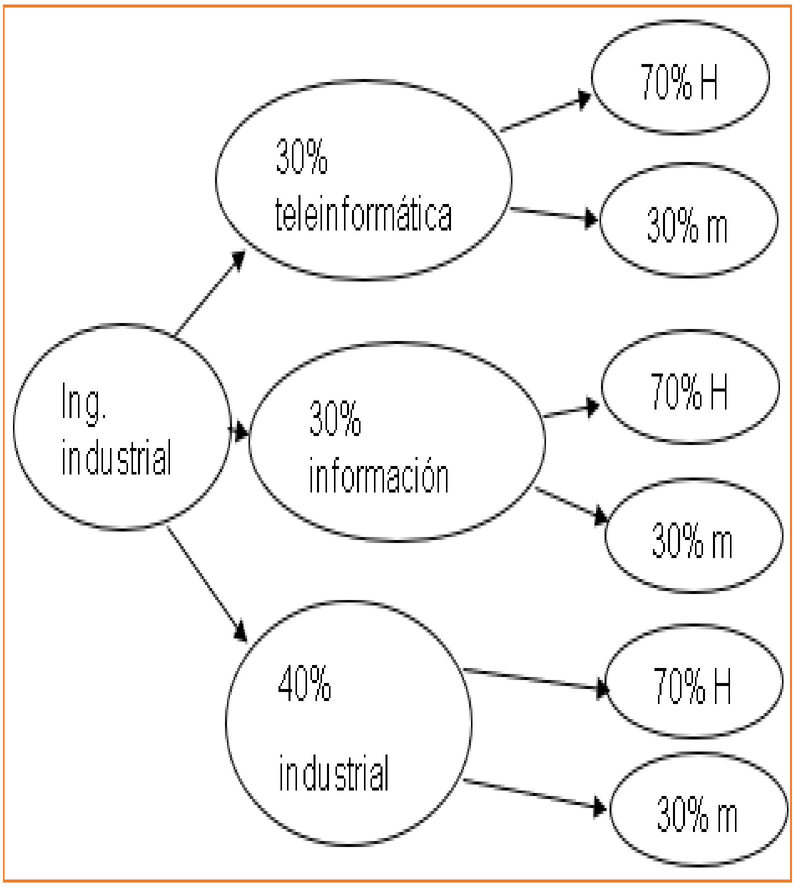


Ilustración 122: Estudiantes - (Ejemplo 2)

- ***Ejemplo 3.***

Una persona a diario para va a la oficina y tiene que ir vestido formalmente, al abrir su armario encuentra que tiene 4 camisas, 3 pantalones y 1 par de zapatos. ¿De cuántas maneras posibles la persona puede vestirse?

1. Análisis.
   Se sabe que el oficinista cuenta con 4 camisas, 3 pantalones y 1 par de zapatos, para lo cual, en un día parar ir a la oficina solo puede utilizar una prenda por clase, es decir, 1 par de zapatos, 1 camisa y 1 pantalón.

2. Solución

$$4\, camisas * \; 3\, pantalones * 1\, par\; de\; zapatos \; = \; 12\, maneras\; de\; vestir$$

3. Interpretación del problema.

Ilustración 123: Oficinista - (Ejemplo 3)

Zapatos 1	Pantalón 1	Camisa 1	1era manera
Zapatos 1	Pantalón 1	Camisa 2	2da manera
Zapatos 1	Pantalón 1	Camisa 3	3era manera
Zapatos 1	Pantalón 1	Camisa 4	4ta manera
Zapatos 1	Pantalón 2	Camisa 1	5ta manera
Zapatos 1	Pantalón 2	Camisa 2	6ta manera
Zapatos 1	Pantalón 2	Camisa 3	7ma manera
Zapatos 1	Pantalón 2	Camisa 4	8va manera
Zapatos 1	Pantalón 3	Camisa 1	9na manera
Zapatos 1	Pantalón 3	Camisa 2	10ma manera
Zapatos 1	Pantalón 3	Camisa 3	11ava manera
Zapatos 1	Pantalón 3	Camisa 4	12ava manera

4. Gráfica.

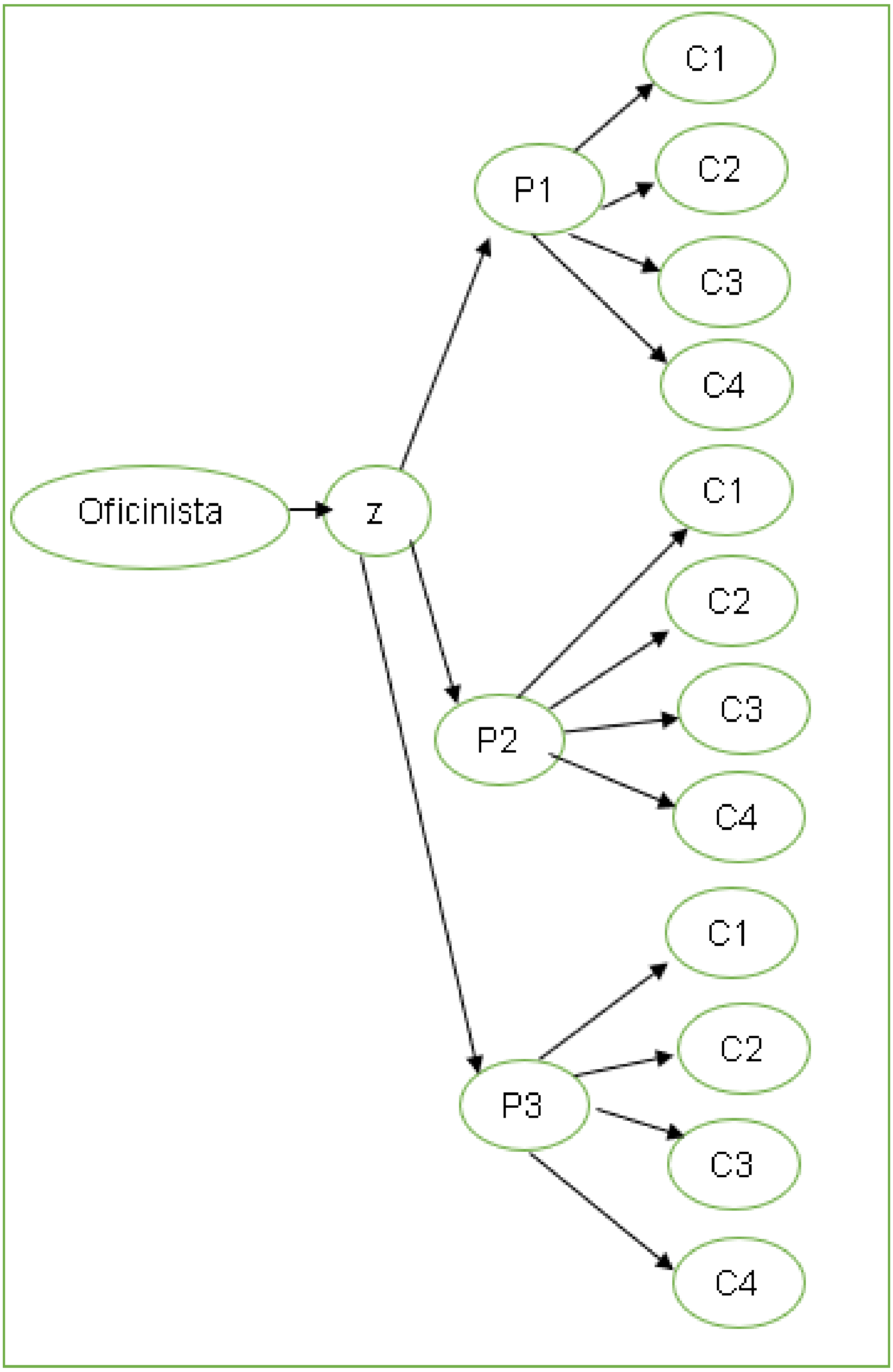


Ilustración 124: Diagrama de árbol - (Ejemplo 3)

2.4. Factorial de un número.

1.Definición.

- El factorial de un número n positivo se expresa por $n!$. Su definición matemática es:
- $n! \begin{cases} 1 & ; n = 0 \\ n(n-1)! & ; n \in N \end{cases}$

Ilustración 125: Representación del factorial

"Factorial es el producto de los enteros positivos desde 1 hasta n, se denota por $n!$.

$$n! = 1 \, x \, 2 \, x \, 3 \, x \ldots x \, (n-2)(n-1)n$$

De tal manera que, $1! = 1$ y $n! = n(n - l)!$. También $0! = 1$." (Lipson & Lipschutz, 2009)

Sea n un entero positivo, el factorial de dicho número se calcula: (Higgins, 2008)

$$n! \begin{cases} 1 & ; n = 0 \\ n(n-1)! & ; n \geq 1 \end{cases}$$

2.4.1. Ejemplos.

- **Ejemplo 1.**
  Calcular el factorial de 4

$$4! = 4 \, x \, 3 \, x \, 2 \, x \, 1 = 24$$

- **Ejemplo 2.**
  Encuentre el factorial de 6

$$6! = 6 \, x \, 5 \, x \, 4 \, x \, 3 \, x \, 2 \, x \, 1 = 720$$

- **Ejemplo 3.**
  Calcule ¿Cuántos ordenamientos se puede hacer con 10 cartas?

Ilustración 126: Cartas - (Ejemplo 3)

$$10! = 10 \, x \, 9 \, x8 \, x7 \, x \, 6 \, x \, 5 \, x \, 4 \, x \, 3 \, x \, 2 \, x \, 1$$
$$= 3628800$$

2.5. Combinaciones.

1.Definición.

- Una combinación son todos los arreglos que se pueden hacer con los elementos n, de un conjunto, tomando m de ellos a la vez, donde su ordenamiento es irrelevante y teniendo en cuenta que $n \geq m$. Su notación es: $c_m^n = \frac{n!}{(n-m)!m!}$

Ilustración 127: Combinaciones de dados

"La combinación de n objetos tomando r a la vez, de un conjunto X, es cualquier elección de los elementos, donde el orden no importa. Es simplemente un subconjunto de X con r elementos. Dichas combinaciones se denotan por: $C(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!r!}$ ". (Lipson & Lipschutz, 2009)

"Una combinación es un subconjunto de los elementos de un conjunto cualquiera, sin tener importancia el orden de ellos.
El número de combinaciones, por r objetos, que pueden tomarse de un conjunto de n elementos es: $nCr = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$". (Puttaswamy, 2010)

2.5.1. Ejemplos.

- ***Ejemplo 1.***
En una clase de programación de 20 alumnos se van a entregar 3 premios iguales por ser el curso que desempeña en el lenguaje de programación C. Calcule de cuantas maneras se pueden entregar los premios si una persona no puede recibir más de un premio.

1. Análisis.
Hay 20 posibles candidatos a los que se puede premiar sin importar el orden, pero solo hay 3 premios, y no se puede premiar más de una vez a un ganador, por lo tanto, habría que aplicar la fórmula de combinatoria sin repetición.

2. Solución.

$$\boldsymbol{c_3^{20} = \frac{20!}{3!\,(20-3)!} = 1140}$$

Ilustración 128: Medallas - (Ejemplo 1)

- **Ejemplo 2.**
  Se tiene un ánfora de 5 bolichas negras, 4 blancas y 3 plomas de dicha ánfora se extraen al azar 4 bolichas ¿De cuántas formas se pueden extraer las 4 bolichas?

  1. Análisis.
     En dicha ánfora se tiene un número determinado de bolichas de las cuales no importa el orden en que se saquen, todas son bolichas, por lo tanto, 12 se elementos y se requiere sacar 4 de ellos.

  2. Solución.

Ilustración 129: Bolichas - (Ejemplo 2)

$$c_4^{12} = \frac{12!}{4!\,(12-4)!} = 495$$

- ***Ejemplo 3.***
  Para cierta conferencia de programadores se seleccionan 3 expositores de un grupo de 3 expertos en C y 2 expertos en Python. ¿De cuántas maneras se pueden escoger 2 expertos en C y 1 en Python?

  1. Análisis.
     En dicha conferencia se tiene un total de 5 se elementos y se requiere sacar 3 de ellos, de los cuales 2 de ellos deben ser expertos en C y 1 de ellos debe ser experto en Python. Por lo tanto, en el primer caso tendremos un total de 3 elementos y se requieren 2 de ellos y en segundo caso tendremos un total de 2 elementos y se requiere 1 de ellos.

  2. Solución.

$$\mathbf{c_2^3 \text{ x } c_1^2} = \frac{3!}{2!(3-2)!}\, x\, 2 = 6$$

Ilustración 130: Conferencia - (Ejemplo 3)

2.6. Permutaciones.

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Ilustración 131: Fórmula de permutaciones

1.Definición.

- Una permutación son todos los arreglos que se pueden hacer con todos o parte de los elementos n, de un conjunto, tomando m de ellos a la vez, donde su ordenamiento relevante y teniendo en cuenta que $n \geq m$. Su notación es: $P_m^n = \frac{n!}{(n-m)!}$

"La permutación de n objetos tomando r a la vez, de un conjunto X, es cualquier elección de los elementos, donde el orden importa. Es simplemente un subconjunto de X con r elementos. Dicha permutación se denota por: $P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$“ (Grimaldi, 2009)

“Una permutación es un subconjunto de los elementos de un conjunto cualquiera, importando el orden en que se ubiquen ellos.
El número de permutaciones, por r objetos, que pueden tomarse de un conjunto de n elementos es: $nPr = \frac{n!}{(n-r)!}$”. (Hernandez & Gonzalez, 2010)

2.6.1. Ejemplos.

- ***Ejemplo 1.***
  En una clase de programación de 15 alumnos se van a entregar 3 premios distintos a dicho curso por desempeñar en el lenguaje de programación C. Calcule de cuantas maneras se pueden entregar los premios si una persona no puede recibir más de un premio.

  1. Análisis.
     Hay 15 posibles candidatos a los que se puede premiar, teniendo en cuenta que importa el orden, solo hay 3 premios, y no se puede premiar más de una vez a un ganador, por lo tanto, habría que aplicar la fórmula de permutaciones.

  2. Solución.

$$\boldsymbol{P_3^{15} = \frac{15!}{(15-3)!} = 2730}$$

Ilustración 132: Clase de programación - (Ejemplo 1)

- ***Ejemplo 2.***

  ¿De cuántas formas distintas pueden colocarse 3 libros de Programación en C y 4 de programación en Python en una estantería, teniendo en cuenta que los del mismo lenguaje deben estar juntos?

  1. Análisis.

     Hay que tener en cuenta que prioriza el orden en que se coloquen, ya que los de la misma categoría deben estar juntos, en el primer caso tendremos un total de 3 elementos y en el segundo un total de 4 elementos.

  2. Solución.

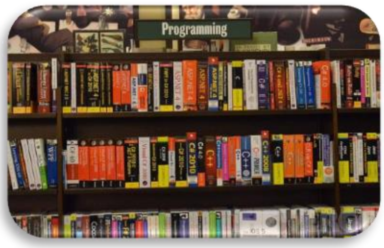


Ilustración 133: Libros de programación - (Ejemplo 2)

$$\boldsymbol{P_3^3 \; X \; P_4^4 = \frac{3!}{3!\,(3-3)!} \; X \; \frac{4!}{4!\,(4-4)!} = 144}$$

- ***Ejemplo 3.***

  Para cierta conferencia de programadores participan 5 expositores ¿De cuántas maneras distintas se puede premiar los 3 primeros lugares, siendo el primero el que gane medalla de oro, el segundo gane medalla de plata y el tercero gane medalla de bronce?

  1. Análisis.

     Hay que tener en cuenta que prioriza el orden en que se premien a los ganadores, ya que el primer lugar tiene más prioridad que el segundo y el tercero, el segundo tiene más prioridad que el tercero

  2. Solución.

$$\mathbf{P_3^5} = \frac{\mathbf{5!}}{\mathbf{(5-3)!}} = \mathbf{60}$$

Ilustración 134: Expositores - (Ejemplo 3)

2.7. Ejercicios propuestos.

Ejercicio 1: ¿De cuántas maneras puede un estudiante realizar su proyecto de programación que tiene conocimiento de 2 lenguajes de programación imperativa y 3 lenguajes de programación orientada a objetos? Teniendo en cuenta que no puede programar en ambos tipos de lenguajes a la vez.

Ejercicio 2: Una ingeniero desea comprar una computadora para sus trabajos, tiene para escoger entre las siguientes marcas: Lenovo, Toshiba y Dell, el día en que va a realizar la compra se encuentra que la pc de la marca Lenovo se encuentra en dos generaciones: 6ta y 7ma generación, y de un solo color, mientras que la pc de la marca Toshiba, se presenta en una sola generación: 7ma generación, en 5 colores diferentes y por último la pc de la marca Dell, se presenta en dos generaciones, que es de 6ta y 7ma generación, y 8 colores. ¿De cuántas maneras tiene el ingeniero de comprar un pc?

Ejercicio 3: ¿De cuántas maneras un millonario puede escoger el vehículo que conducirá sabiendo que tiene a su entera disposición 3 autos deportivos, 3 camionetas y 3 motos?

Ejercicio 4: Un bachiller que define estudiar en una de las Universidades que hay en el Ecuador tiene las siguientes opciones: Espol, Espoch, Universidad de Guayaquil, Universidad Católica. De cuantas maneras tiene el estudiante de escoger una universidad.

Ejercicio 5: Un estudiante ha sacado 5 libros de su mochila. Va a colocarlos en el librero. ¿De cuantas maneras distintas podría colocarlos?

Ejercicio 6: Si hay un grupo de 15 estudiantes de ingeniería en telemática, y otro grupo de 10 estudiantes de licenciatura en sistemas de información, de los cuales se deben escoger para un concurso internacional de universidades. ¿cuántas maneras tenemos para escoger 3 estudiantes?

Ejercicio 7: En una encuesta hay 5 tipos diferentes de opciones a escoger en lo que se refiere a lenguajes de programación. ¿De cuántas formas se pueden elegir 3 opciones?

Ejercicio 8: A una clase asisten 10 estudiantes y todos tienen que presentar su proyecto final de la materia de probabilidad antes se presentar se intercambian sus proyectos entre todos para poder ver quién tiene el mejor trabajo ¿Cuántos proyectos se han intercambiado?

Ejercicio 9: ¿De cuántas formas en una conferencia se pueden dar el primer, segundo y tercer premio entre 30 conferencistas?

Ejercicio 10: En una pancarta informativa de la carrera de ingeniería en sistemas palo se pueden publicar: 3 carteles grandes, 2 medianos y 1 pequeño. ¿Cuántos carteles diferentes pueden colocarse?

Ejercicio 11: En una mini empresa de mantenimiento de computadoras se tiene 2 técnicos: M, N. Cierto momento solicitan sus servicios dos empresas K, L, piden un técnico cada empresa. Describa el conjunto de posibles asignaciones si cada técnico puede ir a una sola empresa.

Ejercicio 11: Para conformar un negocio se requiere de tres socios y cuatro administradores. Si se tiene 5 socios y 6 administradores. ¿De cuantas maneras se puede hacer la elección?

Ejercicio 12. En un laboratorio se tiene 7 computadoras de las cuales tres resultan defectuosas. ¿De cuantas maneras se pueden tomar 4 computadoras de tal manera que solo haya una defectuosa?

Ejercicio 13: En un concurso a Miss Universo solían presentar 22 preguntas y cada una con tres opciones. ¿De cuántas formas diferentes se pueden contestar las preguntas?

Ejercicio 14: En un almacén de electrodomésticos, se tiene 4 modelos de aires acondicionados con características propias. ¿De cuántas maneras posibles puedo comprar un aire acondicionado?

Ejercicio 15: En un aula de clase con respecto a la materia programación III se tiene 50 alumnos en la cual se quiere elegir un comité formado por cuatro alumnos. ¿Cuántos comités se pueden formar?

Ejercicio 16: En un almacén venden siete tipos diferentes de televisores. ¿De cuántas formas se pueden elegir tres televisores

Ejercicio 17: Con las letras de la palabra FISICA. ¿Cuántas ordenaciones distintas puedo realizar?

1. ¿Cuántos números de dos cifras se puede formas con los siguientes dígitos? 1,4,3,5,7,8,9,

Bibliografía.

Flores, Á. J. (2012). *Ténicas de conteo.* Colombia.

Grimaldi, R. (2009). *Matemáticas discreta y combinatoria.* New york.

Hernandez, J. L., & Gonzalez. (2010). *Combinaciones.* México.

Higgins, P. (2008). *Number Story: From Counting to Cryptography.* New York: Copernicus.

Instituto de ciencias matemáticas, E. (2006). *Números reales.* Guayaquil.

Lipson, M. L., & Lipschutz, S. (2009). *Tecnicas de conteo.* México: McGraw-Hill.

Puttaswamy, T. K. (2010). *The Mathematical Accomplishments of Ancient Indian Mathematicians.* Netherlands.

Ramirez, O. (2012). *Tenicas de conteo.* México.

Reynoso, M. (2015). *Tecnicas de conteo.* México.

Sanchez, N. (2016). *Principio Aditivo y multiplicativo.*

CAPÍTULO 3

EXPERIMENTO ESTADÍSTICO Y ESPACIO MUESTRAL

Introducción.

En nuestro entorno en el mundo entero tenemos la posibilidad de poder visualizar diferentes tipos de fenómenos, los cuales, muchos de ellos nos presentan diferentes estados y resultados, aunque las condiciones son similares muchas veces.
En este capítulo entenderemos como la probabilidad se combina con nuestro entorno y nos permite relacionarnos con diferentes experimentos aleatorios o estocásticos, y así poder observar, estudiar y analizar los diferentes comportamientos de cada uno de los fenómenos mediante técnicas estadísticas y probabilísticas, para lograr el análisis e interpretación de los datos obtenidos y aplicar, entre muchos conceptos que brinda la probabilidad, lo que es la teoría de la probabilidad.

Ilustración 135: Pierre Simón de Laplace

Contenido.

- Experimentos.
- Espacio muestral del experimento.
- Eventos.
- Funciones.
- Función de la probabilidad.
- Axiomas de la probabilidad.
- Ley del complemento.
- Ley aditiva de probabilidad.

3.1. Experimentos estadísticos.

1.Definición.

- Un experimento es un fenómeno que va a sufrir varios cambios, se lo llama aleatorio si no se puede deducir cuál es el resultado que nos arrojará, pero sí conocemos todos los resultados posibles, además éste se puede repetir varias veces. Un experimento aleatorio sería el lanzamiento de un dado, el cuál tendría 6 posibles eventos: $E1, E2, E3, E4, E5, E6$.

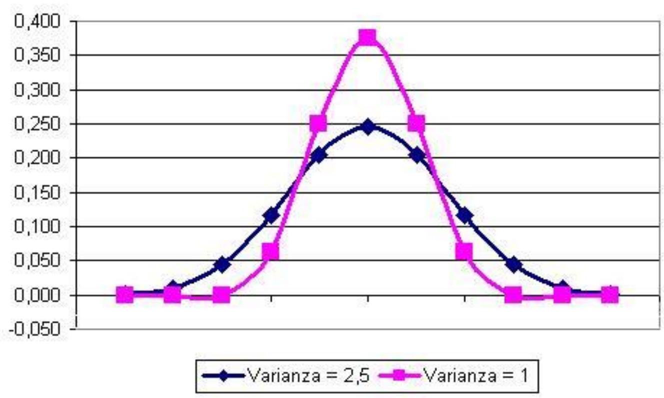


Ilustración 136: Gráfica de un experimento estadístico.

"Un experimento es un proceso que se observa con el fin de establecer una relación entre condiciones en que se realizan y los resultados que se obtienen." (Canavos, 2013)

"Un experimento es el proceso mediante el cual se obtiene una observación (o una medición) de un fenómeno." (Snell, 2013)

3.1.1. Clasificación de un experimento.

La clasificación de un experimento es la siguiente:

- **Experimento determinístico:** Esta clasificación del experimento es aquella que produce los mismos resultados cuando se lleva a cabo con mismas condiciones iniciales.

- **Experimento aleatorio:** Esta clasificación del experimento es aquella que produce resultados distintos, incluso si este se lleva cabo siempre de la misma forma.

3.2. Espacio muestral del experimento.

Ilustración 137: Lados de una moneda.

1.Definición.

- El espacio muestral decimos que es el conjunto de todos los sucesos o eventos elementales del experimento y lo denotamos como omega $(\Omega)\ o\ (E)$. por ejemplo, el espacio muestral de lanzar una moneda sería: $(\Omega) = \{S, C\}$.

"El espacio muestral de un experimento puede considerarse como un conjunto de diferentes resultados posibles, en el que cada resultado puede ser un punto, un elemento o un evento del espacio muestral." (Snell, 2013)

"El espacio muestral vendrá acompañado de sucesos, la pareja que ambos constituyen, (Ω, A), recibe el nombre de espacio probabilizable." (Suay, 2012)

3.2.1. Clasificación del espacio muestral del experimento.

La clasificación de un espacio muestral es la siguiente:

- **Espacio muestral discreto:** Espacio muestral discreto es aquel en el que se obtienen los elementos después de hacer un proceso de conteo, generalmente son subconjuntos de los números enteros.

- **Espacio muestral continuo:** Espacio muestral continuo es aquel en el que se obtienen los elementos después de hacer un proceso de mediciones, generalmente son intervalos en el conjunto de los números reales.

3.2.2. Ejemplos.

- ***Ejemplo 1.***
  Al realizar una encuesta en la universidad Guayaquil a los estudiantes de primer semestre de la carrera de Teleinformática indicando si el lenguaje de Programación Python es más sencillo y versátil en sintaxis, en comparación del lenguaje C y observar las respuestas posibles: totalmente de acuerdo, parcialmente de acuerdo, indiferente, parcialmente en desacuerdo, totalmente en desacuerdo; por lo que el espacio muestral es:

$$\boldsymbol{S} = \left\{ \begin{array}{c} \textbf{totalmente de acuerdo}, \\ \textbf{parcialmente de acuerdo}, \\ \textbf{indiferente}, \\ \textbf{parcialmente en desacuerdo}, \\ \textbf{totalmente en desacuerdo} \end{array} \right\}$$

Ilustración 138: Ejemplo 1

- ***Ejemplo 2.***

Si realizamos la compra de dos programas , observamos que los posibles resultados pueden ser : compra dos licencias de antivirus Northon; compra una licencia de antivirus Northon, una licencia de antivirus Eset; compra una licencia de antivirus Eset, una licencia de antivirus Northon; compra dos licencia de Eset.

Ilustración 139: Ejemplo

$$\boldsymbol{T} = \left\{ \begin{array}{c} \{\boldsymbol{Northon}, \boldsymbol{Northon}\}, \\ \{\boldsymbol{Northon}, \boldsymbol{Eset}\}, \\ \{\boldsymbol{Eset}, \boldsymbol{Northon}\}, \\ \{\boldsymbol{Eset}, \boldsymbol{Eset}\} \end{array} \right\}$$

- ***Ejemplo 3.***

  En un proyecto que realizan dos estudiantes de ingeniería en sistemas que consiste realizar un programa de servicio al cliente, el cual tienen que presentarlo al día siguiente y el requisito más importante es que solo lo pueden programar en uno de los siguientes 4 lenguajes de programación: C#, Java, Visual Basic, C++. ¿Cuál sería el espacio muestral?

$$\boldsymbol{P} = \left\{ \begin{array}{c} \{\boldsymbol{C\#}\}, \\ \{\boldsymbol{JAVA}\}, \\ \{\boldsymbol{Visual\ Basic}\}, \\ \boldsymbol{C++} \end{array} \right\}$$

3.3. Eventos.

1.Definición.

- Un evento E está compuesto por todos los posibles resultados de algún experimento, es decir, tendremos uno o más eventos elementales del experimento aleatorio. Por ejemplo, los eventos seguros al lanzar un dado son: $E = \{1,2,3,4,5,6\}$

Ilustración 140: Lanzamiento de una moneda

"Un Evento del espacio muestral es considerado como un grupo de resultados contenidos en este, cuyos elementos otorga características similares." (Canavos, 2013)

"Los sucesos o eventos no son más que subconjuntos de Ω , podemos operar con ellos de acuerdo con las reglas de la teoría de conjuntos." (Suay, 2012)

3.3.1. Tipos de eventos.

Evento seguro: Cuando llevamos a cabo cualquier experimento aleatorio es seguro que siempre tendremos posibles resultados, por lo tanto, un evento seguro es el que está compuesto por dichos resultados. (RedDescartes, 2011)

Evento imposible: Cuando llevamos a cabo un experimento aleatorio y nunca ocurre el suceso esperado. Se expresa con el símbolo $\emptyset$. (RedDescartes, 2011)

Evento complementario a otro evento(A): Evento complementario a otro es aquel que sucede cuando no ocurre el evento A. (RedDescartes, 2011)

Evento compuesto: Cuando llevamos a cabo un experimento aleatorio y obtenemos más de un resultado del espacio muestral. (RedDescartes, 2011)

Evento elemental: Cuando llevamos a cabo un experimento aleatorio y obtenemos un único resultado del espacio muestral. (RedDescartes, 2011)

3.3.2. Eventos especiales.

Eventos mutuamente excluyentes, podemos determinar que son mutuamente excluyentes si únicamente unos de los dos sucesos suceden en cualquier de los resultados o intentos. (Render, 2012)

Eventos colectivamente exhaustivos, podemos determinar que son colectivamente exhaustivos si del grupo de intentos incluye cada intento posible. (Render, 2012)

Eventos que no son mutuamente excluyentes: Cuando los eventos no son mutuamente excluyentes, no pueden obtenerse la probabilidad de que ocurra uno u otro sumando simplemente las probabilidades individuales. (Snell, 2013)

3.3.3. Ejemplos.

- **Ejemplo 1.**
  Si un experimento consiste en registrar el número de las compras que realiza una compañía a un distribuidor de software con licencias originales, al mes. El distribuidor solo vende al por mayor, es decir, de entre 25, 50 y 100 programas. Determine ¿Cuáles son los elementos de omega? Y liste los eventos.

  Solución:

1. Definición de eventos
   E_1: No se realizan compras nuevas.
   E_2: El número de compras nuevas es de 25.
   E_3: El número de compras nuevas es de 50.
   E_4: El número de compras nuevas es 100.

Ilustración 141: Software - (Ejemplo

2. Solución.

$\Omega = \{no\ se\ reciben\ compras, el\ número\ de\ compras\ es\ de\ 25, el\ número\ de\ compras\ es\ de\ 50, el\ número\ de\ compras\ es\ de\ 100\}$

- ***Ejemplo 2.***

Si un experimento consiste en tomar una prueba distinta en 2 días consecutivos a los alumnos de 1er semestre de ingeniería en telecomunicaciones. La prueba pide realizar un programa en un lenguaje de programación conocido, ya sea C# o Python. Liste sus eventos.

1. Definición de eventos.

E_1: Se toma la prueba un día en C# y el otro en C#.
E_2: Se toma la prueba un día en C# y el otro en Python.
E_3: Se toma la prueba un día en Python y el otro en Python.
E_4: Se toma la prueba un día en Python y el otro en C#.

2. Solución.

$\Omega = \{(C, \#\ C\#)(C\#, Python)(Pyhton, Python)(Python, C\#)\}$

Ilustración 142: Test - (Ejemplo 2)

- ***Ejemplo 3.***

Sea un experimento que consiste en determinar el primer y segundo lugar para premiar a 2 de los mejores estudiantes que hay en los cursos de ingeniería en sistemas e ingeniería en teleinformática. Determine los eventos:

1. Definición de eventos.

E_1:El primer lugar es para un estudiante de ingeniería en sistemas
E_2:El primer y segundo lugar son para los estudiantes de ingeniería en sistemas

2. Solución del problema.

Sea S= estudiante de ingeniería en sistemas y T= estudiante de ingeniería en networking

$$\Omega = \{(S, S)(S, T)(T, T)(T, S)\}$$

E_1:El primer lugar es para un estudiante de ingeniería en sistemas

$$E_1 = \{(S, S)(S, T)\}$$

E_2:El primer y segundo lugar son para los estudiantes de ingeniería en sistemas

$$E_1 = \{(S, S)\}$$

Ilustración 143: Estudiante - (Ejemplo 3)

3.4. Funciones.

1.Definición.

- Una función es una relación o corelación entre cantidades. Sea un conjunto X el cual se denominaría el dominio y otro conjunto Y el cual se denominaría en codominio, la función es una relación entre ellos que consiste en relacionar a cada elemento de X con un único elemento de Y, tambien se les llama valor de entrada y de salida. Si a los elementos de X le corresponden más de un elementeno del conjunto Y, deja de ser una función. Su notación sería: $f : X \;-> Y$

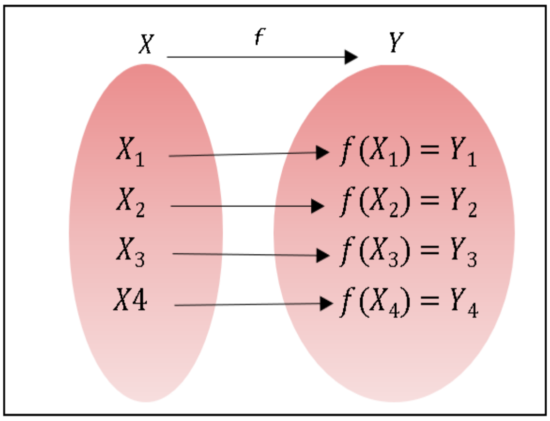


Ilustración 144: Relación entre un Conjunto X(Dominio) y un conjunto Y (Rango)

3.4.1. Tipos de funciones.

Hay que saber que una función cualquiera puede presentar muchas características, es por ello que hay que tipificarlas para poder sacar un respectivo análisis.

Entre los tipos de funciones tenemos:

1. **Función inyectiva.**
   Se la denomina función inyectiva si a cada elemento del rango o condominio le corresponde un solo elemento del dominio.
   Deja de ser función inyectiva si a un elemento del conjunto de llegada le corresponde más de un elemento del conjunto de partida.

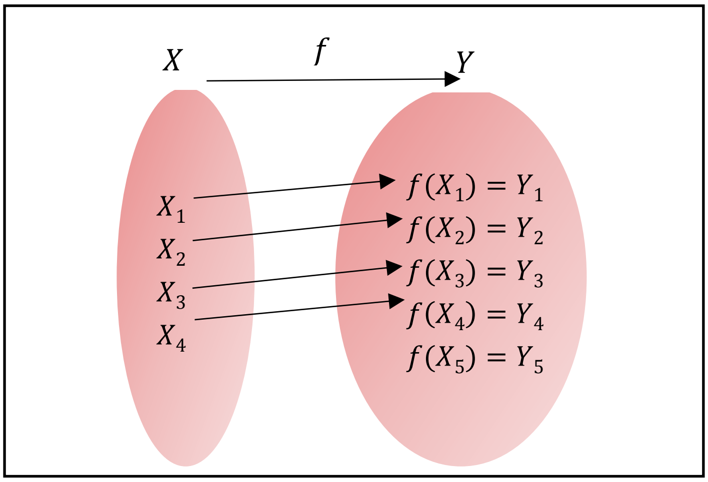


Ilustración 145: Función inyectiva.

2. **Función sobreyectiva.**
   Se la denomina función sobreyectiva si todos los elementos del conjunto de llegada, es decir, el rango, le corresponde al menos un elemento del conjunto de partida, es decir, el dominio.

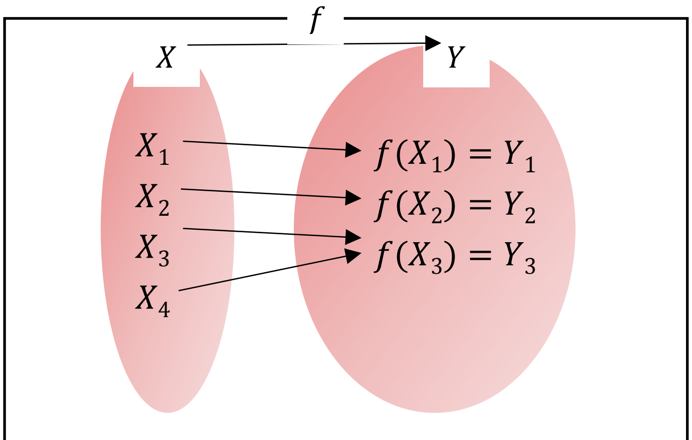


Ilustración 146: Función sobreyectiva.

3. **Función biyectiva.**
   Se la denomina función biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva a la vez.

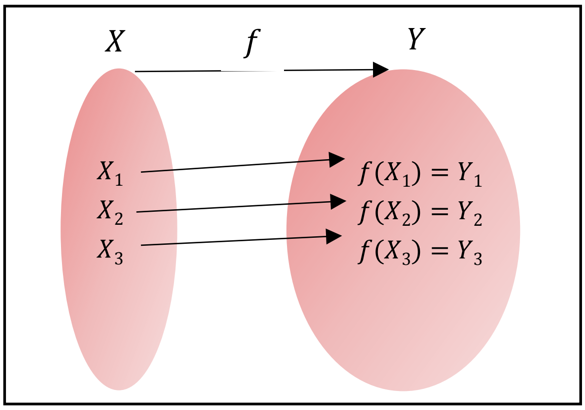


Ilustración 147:Función biyectiva

4. **Función constante.**

   Es aquella función que toma el mismo valor en su variable dependiente, para cualquier valor que se le dé a la variable independiente. Su definición formal es:

$$f(x) = C \ (La\ c\ es\ una\ constante)$$

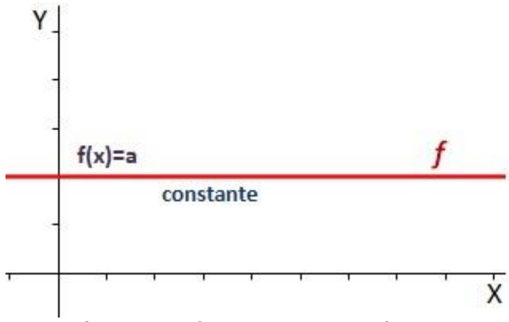


Ilustración 148: Gráfica de una función constante.

5. **Función polinómica.**

   La definición formal de una función polinómica es:

$$f(x) = a0 + a1X + a2X2 + \cdots + anXn$$

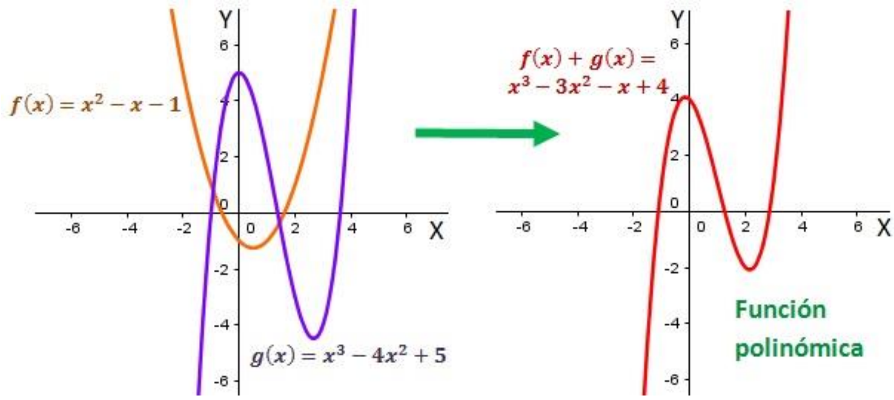


Ilustración 149: Gráfica de una función polinómica.

5.1. **Función polinómica de primer grado.**

Son las funciones que se componen de un polinomio de primer grado. Su definición matemática es:

$$f(x) = mx + n$$

Donde m es un escalar, x es la variable independiente y n es una constante.

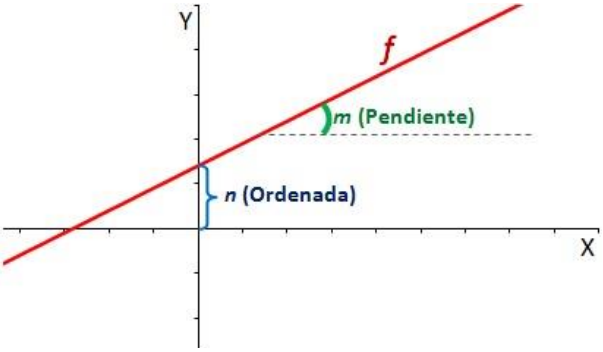


Ilustración 150: Gráfica de una función polinómica de primer grado.

5.1.1. Función lineal.

Forma parte de las funciones polinómicas de primer grado, esta función pasa por el origen. Su definición matemática es:

$$f(x) = mx$$

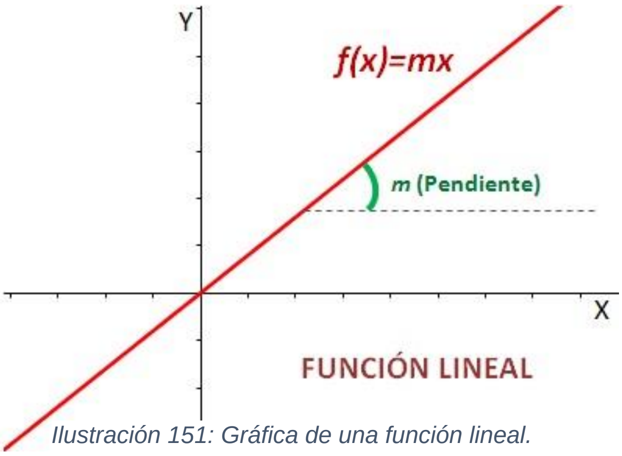


Ilustración 151: Gráfica de una función lineal.

5.2. Función cuadrática.

Es una función polinómica de segundo grado. Su definición matemática formal es:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Donde los términos a, b y c son números reales y a necesariamente es diferente de 0.

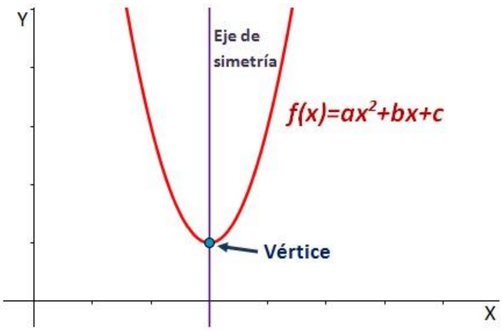


Ilustración 152: Gráfica de una función cuadrática.

5.3. Función cúbica.

Es una función polinómica de tercer grado. Su definición matemática formal es:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Donde los términos a, b, c y d son números reales y a necesariamente es diferente de 0.

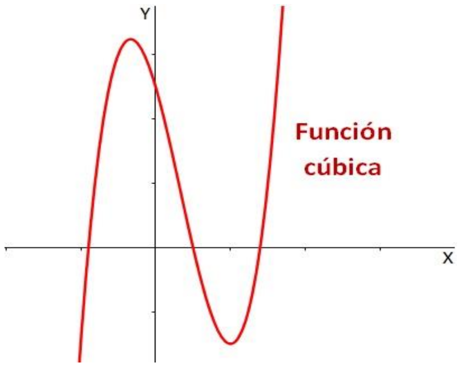


Ilustración 153: Gráfica de una función cubica

6. Función racional.

Es la función que resulta del cociente de dos polinomios. Su definición matemática formal es:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

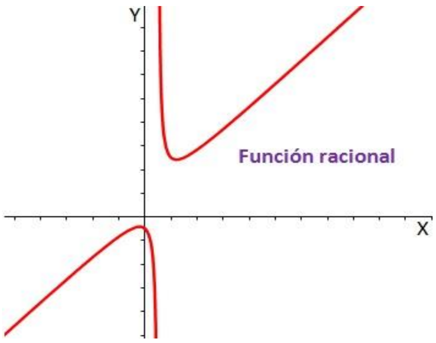


Ilustración 154: Gráfica de una función racional.

7. Función exponencial.

Su definición formal es:

$$f(x) = a^x$$

Donde a es un número real mayor a 0 y distinto de 1.

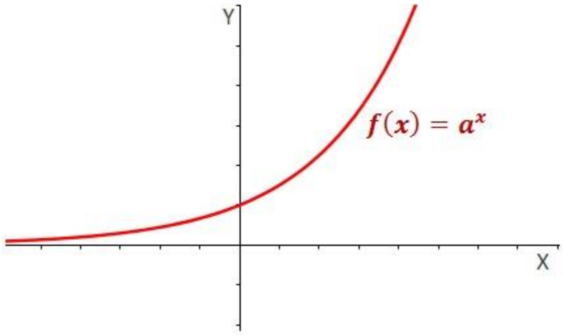


Ilustración 155: Gráfica de una función exponencial.

8. **Función logarítmica.**
   Su definición formal matemática se expresa:

$$f(x) = log_a(x)$$

   Donde a es un número real mayor a 0 y distinto de 1.

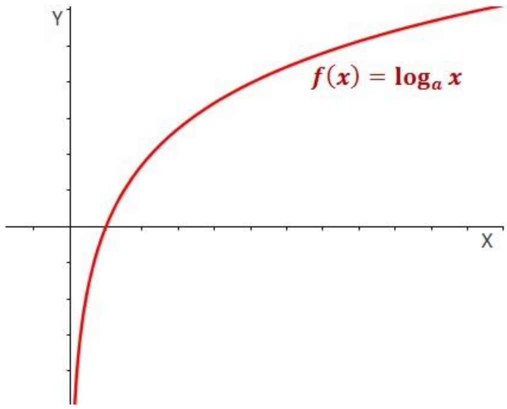


Ilustración 156: Gráfica de una función logarítmica.

1.Nota

- En este libro nos vamos a enfocar más sobre lo que es la **probabilidad.** Simplemente se hizo un preámbulo de lo que es una función y sus tipos para hacer más sencillo el entendimiento de lo que es una función probabilística, tema que veremos posteriormente.

3.5. Función de probabilidad.

1.Definición.

- La función de la probabilidad es la función que relaciona posibles resultados a cada uno de los espacios muestrales pertenecientes a una variable discreta. Supongamos que P es una función cuyo dominio es $\mathcal{L}$ y su conjunto de llegada es el intervalo cerrado de números reales de cero a uno: $P\colon\ \mathcal{L} \rightarrow\ [0,1]$

"Digamos que, Y es una variable aleatoria discreta, la Función de Probabilidad es la función $p\colon R\ \rightarrow\ [0, 1]$ que asigna probabilidades a cada uno de los espacios muestrales pertenecientes a Y." (Perez, 2010)

"Se la denomina como la probabilidad de que una variable aleatoria X tome un valor individual: $f(x_i) = (X = x)$". (Gasco, 2011)

3.5.1. Propiedades de la función de la probabilidad.

Sea $P\colon \mathcal{L} \rightarrow\ [0,1]$ una función de probabilidad. Se deben cumplir estas 3 propiedades:

1. $P(\Omega) = 1$

2. $0 \leq P(E)\ \leq 1 \quad \forall\, \mathrm{E} \in \mathcal{L}$

3. $P(E_1 \cup\ E_2) = P(E_1) + P(E_2)$ si y solamente si E_1y E_2 son mutuamente excluyentes

3.5.2. Regla de Laplace.

1.Definición.

- Esta regla establece que la probabilidad de cualquier evento E es igual al cociente entre el número de resultados favorables y el número total de posibles resultados del espacio muestral Ω. Esto es: $P(E) = \frac{N(E_i)}{N(\Omega)}$

3.5.3. Ejemplos.

➢ ***Ejemplo 1.***
En un colegio se fue preguntando a 4 parejas de estudiantes que versión, entre, Windows 7 y 8 preferían usar ¿cuáles fueron sus posibles respuestas?

a.) Defina el conjunto omega

$$\Omega = \left\{ \begin{matrix} \{windows\ 7\ , windows\ 7\}, \\ \{windows\ 7, windows\ \ 8\}, \\ \{windows 8, windows\ 7\}, \\ \{windows\ 8, windows\ 8\} \end{matrix} \right\}$$

b.) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 1 pareja solo haya escogido Windows 7?

1. Definición de evento
   $E_{1=}$ Que los 2 estudiantes que conforman la pareja hayan escogido Windows 7
   $$E_{1=}\{(Windows\ 7,\ \ Windows\ 7)\}$$
2. Calculo de la probabilidad

$$P(E_1) = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

Ilustración 157: Windows 7 y Windows 8 - (Ejemplo1)

- ***Ejemplo 2.***
  Se tienen los libros de cinco materias de distintos paralelos de la carrera Licenciatura en Sistemas de Información: Matemática aplicada I, contabilidad I, expresión oral y escrita, fundamentos de computación I y programación I.

a.) Defina el conjunto omega.

$$\Omega = \left\{ \begin{matrix} (Contabilidad\ I), \\ (Expresión\ oral\ y\ escrita), \\ (Fundamentos\ de\ computación\ I), \\ (Programación\ I) \\ (Matemática\ aplicada\ I) \end{matrix} \right\}$$

Ilustración 158: Libros – (Ejemplo 2)

b.) Si se toma uno de ellos, ¿Cuál es la probabilidad de que este sea de matemática aplicada I o de fundamento de computación I?

1. Definición del evento
   $E_{1=}$ Al tomar un libro este sea de matemática aplicada I o de fundamento de computación I

$$E_{1=}\{Matemática\ aplicada\ I, Fundamento\ de\ computación\ I\}$$

2. Calculo de la probabilidad

$$P(E_1) = \frac{2}{5} = 0,4$$

- ***Ejemplo 3.***

  En un curso de 20 estudiantes la carrera de ingeniería en teleinformática, 10 estudian inglés y 10 estudian programación, además de que 5 estudian ambas materias.

  a.) Defina los eventos.

  $E_{1=}\ Que\ 5\ estudien\ ambas.$

  $E_{2=} Que\ 10\ estudien\ inglés.$

  $E_{3=} Que\ 10\ estudien\ programación.$

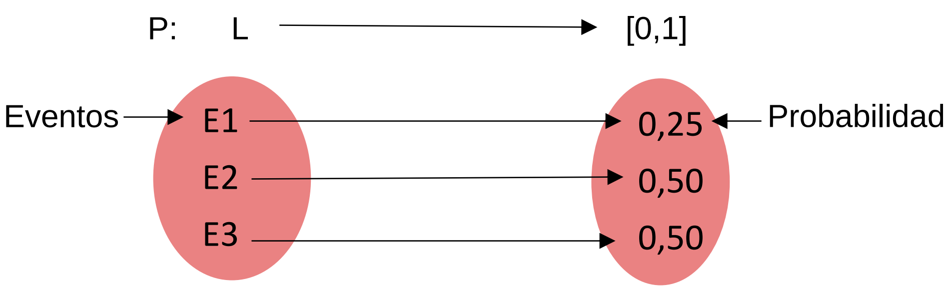
Ilustración 159: Estudiantes - (Ejemplo 3)

  b.) Relación los eventos con sus espacios muestrales.

$$P(E_1) = \frac{5}{20} = 0,25$$

$$P(E_2) = \frac{10}{20} = 0,50$$

$$P(E_3) = \frac{10}{20} = 0,50$$



  c.) Cuál es la probabilidad de que uno estudie programación al escoger al azar a un estudiante del grupo.

$$P(E_1) = \frac{10}{20} = 0,50$$

3.6. Axiomas de probabilidad.

1.Definición.

- Un axioma de probabilidad es el componente principal de un sistema de condiciones que deben cumplirse y junto con las pautas de inferencia especifican un sistema deductivo, para que una función determinada sobre un conjunto de eventos determine sus probabilidades.
- Los siguientes axiomas fueron formulados por el matemático ruso Kolmogórov. Por lo que se los denomina axiomas de Kolmogórov.

  - Axioma 1.- $Para\ todo\ evento\ S,\ 0 \leq P(S) \leq 1$
  - Axioma 2.- $P(S) = 1$
  - Axioma 3.- Si $A_1\ y\ A_2$ son eventos mutuamente exclusivos, entonces:

Ilustración 160: Andréi Kolmogórov

"Supongamos que S es un espacio muestral y P una función de valores reales definida en ε. Entonces P se la denomina función de probabilidad, y $P(A)$ es la probabilidad del evento A." (Santalo, 2013)

"Los axiomas de probabilidad son las condiciones mínimas que deben verificarse para que una función que definimos sobre unos sucesos determine consistentemente valores de probabilidad sobre dichos sucesos." (Reitsch, 2014)

3.7. Ley del complemento.

1.Definición.

- Sea *x* un subconjunto perteneciente al espacio muestral *S*, su complemento está compuesto por los elementos de *S* que no pertenecen a x. El símbolo del complemento se denota por: Ā o por A^C.
  Según los axiomas antes mencionados, $P(S) = 1$.
  - En efecto, como $A \cup A^C = S$ entonces $P(A \cup A^C) = P(S)$
  - Así $P(A \cup A^C) = 1$
  - A y A^C son eventos mutuamente exclusivos, entonces $P(A) + P(A^C) = 1$
  - Finalmente $\boldsymbol{P(A^C) = 1 - P(A)}$ la cual se denomina la ley del complemento.

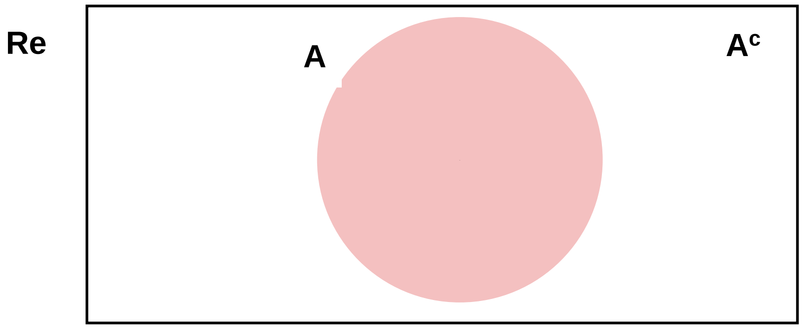


Ilustración 161: Complemento del conjunto A

"La probabilidad del complemento de un conjunto cualquiera D se denomina como la probabilidad complementaria: $P(D^C) = 1 - P(D)$." (Luna & Guillermo, 2010)

"Sea A un evento, su complemento está definido como un nuevo evento que consta de todos los espacios muestrales que no se encuentran en A. Se denota: A_c." (Anderson, Sweeney, & Williams, 2010)

3.7.1. Ejemplos.

➢ **Ejemplo 1.**

En un curso de 20 alumnos de la carrera de ingeniería en teleinformática, 10 estudian inglés y 10 estudian programación, además de que 5 estudian ambas materias. Sea el evento $E_{1=}$ $Que\ 5\ estudien\ ambas$. ¿Cuál es la probabilidad de que 5 alumnos estudien ambas? y determine su complementario.

Solución:

1. La probabilidad de escoger 5 estudiantes

$$P(E_1) = \frac{5}{20} = 0{,}25$$

Ilustración 162: Estudiantes - (Ejemplo 1)

2. Complementario

   El complementario de un evento se determina por:

$$P(E^C) = 1 - P(E)$$

   Entonces:

$$P\left(E_1{}^C\right) = 1 - \frac{5}{20}$$

$$P(E_1{}^C) = 0{,}75$$

- **Ejemplo 2.**
  Sea un experimento que consiste en determinar el primer y segundo lugar para premiar a 2 de los mejores estudiantes que hay en 1 curso de ingeniería en sistemas y 1 curso de ingeniería en teleinformática, en ingeniería en sistemas hay 30 y en ingeniería en teleinformática hay 15. Determine el evento complementario de los siguientes eventos.
  E_1:El primer lugar es para un estudiante de ingeniería en sistemas
  E_2:El primer y segundo lugar son para los estudiantes de ingeniería en sistemas

  Solución:

  Sea S= estudiante de ingeniería en sistemas y T= estudiante de ingeniería en networking

  1. Sea E_1: El primer lugar es para un estudiante de ingeniería en sistemas.

  Y E_2:El primer y segundo lugar son para los estudiantes de ingeniería en sistemas

  Sus cardinalidades son $N(E1) = 30$ y $N(E2) = 15$

2. Sus probabilidades son:

$$P(E_1) = \frac{30}{45} = 0{,}67$$

3. Su complementario sería:

$$P({E_1}^C) = 1 - \frac{30}{45} = 0{,}33$$

Ilustración 163: Ingenieros - (Ejemplo 2)

- **Ejemplo 3.**
  Se realiza una encuesta a 30 estudiantes de un curso de Ingeniería en teleinformática preguntando si prefieren el lenguaje de programación Python en vez del lenguaje de programación C, 15 seleccionaron “De acuerdo”, 5 “Parcialmente de acuerdo”, 10 “En total desacuerdo”.
  ¿Cuál sería la probabilidad de el evento complementario de que un grupo de estudiantes estén en total desacuerdo con la opción planteada?

1. E_1: Estudiantes que estén en total desacuerdo en preferir el lenguaje de programación Python.

$$N(E1) = 15$$

2. Su probabilidad es:

$$P(E_1) = \frac{15}{30} = 0{,}50$$

Ilustración 164: Estudiantes- (Ejemplo 3)

3. La probabilidad del evento complementario es:

$$P({E_1}^C) = 1 - \frac{15}{30} = 0{,}50$$

3.8. Ley aditiva de probabilidad.

1.Definición.

- Sean dos eventos que pueden ocurrir al mismo tiempo, es decir, no excluyentes. Se pueden descomponer en eventos mutuamente excluyentes para aplicar la ley aditiva de probabilidad, sumando las probabilidades de cada uno y restando la probabilidad de ambos. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

“Si dos o más eventos no son mutuamente excluyentes, la probabilidad de que sucedan ambos o solo uno de ellos se deduce sumando sus probabilidades particulares, pero restando la probabilidad de que suceda la común entre ellos: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.” (S. & Fernández., 2010)

“Sean dos eventos cualesquiera A y B la probabilidad de la unión de esos dos eventos es $P(A \cup B)$ entonces la ley aditiva de la probabilidad se la enuncia de la siguiente manera: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.” (Torres, 2010)

3.8.1. Ejemplos.

- **Ejemplo 1.**

  En un grupo de estudiantes de la universidad de Guayaquil la probabilidad de que prefieran carreras técnicas es $23/100$; administrativas es de $23/100$; sociales $11/25$; las tres $1/10$; técnicas y administrativas $23/50$; técnicas y sociales $11/50$; administrativas y sociales $17/100$ ¿Cuál es la probabilidad de que prefieran las 3?

1. Definir eventos.

   $E_1: Los\ estudiante\ prefieren\ carreras\ técnicas.$

   $E_2: Los\ estudiante\ prefieren\ carreras\ administrativas.$

   $E_3: Los\ estudiante\ prefieren\ carreras\ sociales.$

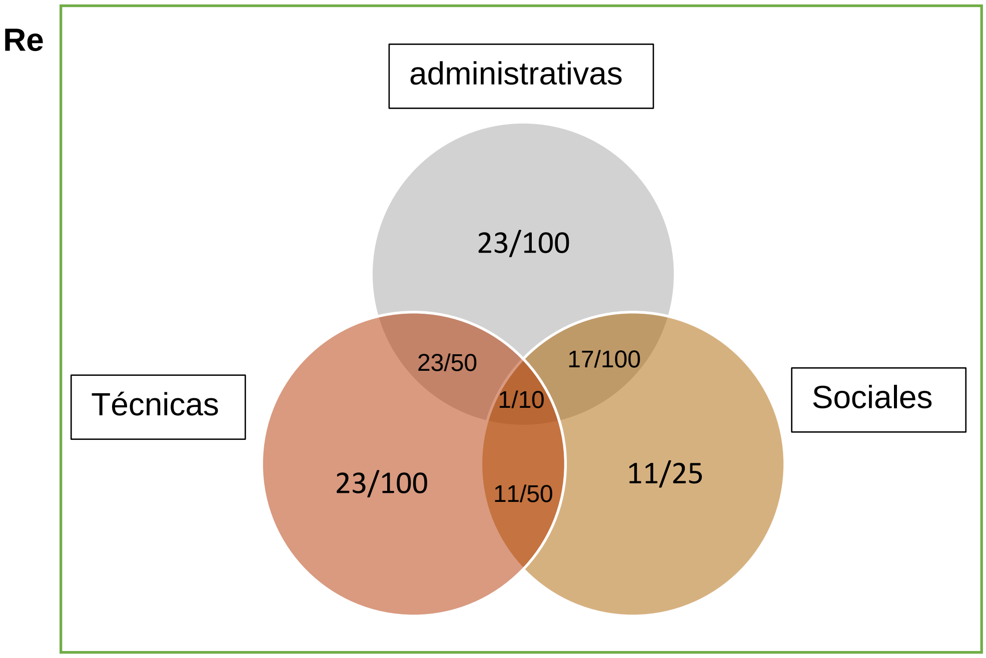
2. Definición matemática de los eventos.

   $P\ (E_1) = 23/100$

   $P\ (E_2) = 23/100$

   $P\ (E_3) = 11/25$

3. Gráfico.



4. Desarrollo del problema.

$$P\ (E_1 U\ E_2 U\ E_3) = \frac{23}{100} + \frac{23}{100} + \frac{11}{25} - \frac{23}{50} - \frac{17}{100} - \frac{11}{50} + \frac{1}{10} = 0{,}15$$

$$P\ (E_1 U\ E_2) = 0{,}5.$$

- **Ejemplo 2.**
  En una fiesta se realiza una apuesta la cual consiste en lanzar un dado y si sale un número par o divisible para 5 gana la apuesta. Determine la probabilidad para ganar la apuesta y grafique mediante diagrama de Venn.

1. Definir eventos.

E_1: Que el resultado sea impar

$E_{1=}\{1,3,5\}$

$N(E_1) = 3$

E_2: Que su resultado sea divisible para 5

$E_{1=}\{5\}$

$N(E_2) = 1$

2. Gráfico.

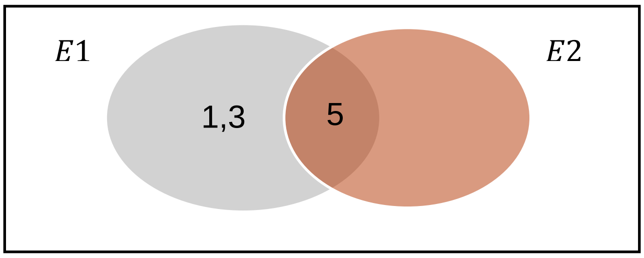


Ilustración 165: Diagramas de Venn de E1 y E2

3. Definición matemática

$E_1 \cap E_2 = 5$

$P\ (E_1) = \frac{3}{6}$

$P\ (E_2) = \frac{1}{6}$

$P\ (E_1 \cap E_2) = \frac{1}{6}$

4. Desarrollo del problema

$$P\ (E_1 U\ E_2) = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$$

$$P\ (E_1 U\ E_2) = 0{,}5.$$

- **Ejemplo 3.**

En la universidad de Guayaquil existen dos carreras en la facultad de CISC ingeniería en sistemas e ingeniería en networking. El 50% de los estudiantes de ingeniería en sistemas saben programar en C y el 30% del de ingeniería en networking saben programar en Python. Un 20% de sus estudiantes saben programar en ambos.

Si se elige un estudiante de la facultad al azar. Calcular la probabilidad de que ese estudiante:

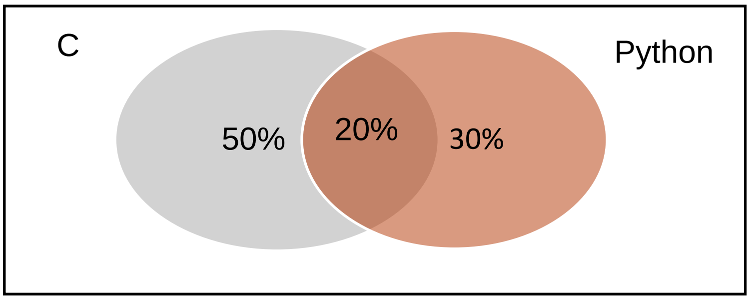
a) Sepa programar en algún lenguaje de programación.

1. Definimos eventos.

E_1: El estudiante escogido programe en C

E_1: El estudiante escogido programe en Python

2. Grafico



3. Definición matemática

$E_1 \cap E_2 = 5$
$P\ (E_1) = \frac{50}{100}$
$P\ (E_2) = \frac{30}{100}$
$P\ (E_1 \cap E_2) = \frac{20}{100}$

4. Desarrollo del problema

$P\ (E_1 \cup E_2) = \frac{50}{100} + \frac{30}{100} - \frac{20}{100}$

$P\ (E_1 \cup E_2) = \frac{3}{5} = 0{,}6$

3.9. Ejercicios propuestos.

Ejercicio 1: En un casino en el juego de los dados se requiere lanzar un par de dados de 6 lados cada uno numerados del 1 al 6. ¿Cuál es la probabilidad de que salga un número impar al lanzar los dos dados?

Ejercicio 2: En un examen de probabilidad el cual se califica sobre 10 puntos Pedro realizó el examen y necesitaba sacar un 9 o un 7. James realizó el examen, y quería sacar un 10 o un 9. ¿Qué evento tiene una probabilidad mayor?

Ejercicio 3: En un concurso que consiste en girar una ruleta para ganarse un premio la cual está dividida en 10 colores distintos. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona haga girar esa ruleta y saque el color numero 6?

Ejercicio 4: Un profesor de programación en un examen él hace los exámenes para sus alumnos. En cada examen pone ejercicios: uno de dos lenguajes de programación (C, o Python), uno de dos temas (separación de capas, base de datos), un tema relacionado a base de datos (SQL, visual Basic).

Pero olvidó marcar los exámenes. Asumiendo que a cada alumno les toca exámenes igualmente probables, ¿cuál es la probabilidad de que en el examen que le toque a algún estudiante haya un lenguaje de programación C y base de datos SQL?

Ejercicio 5: ¿Cuál es la probabilidad de sacar un estudiante de ingeniería en sistemas (10) o un estudiante de ingeniería en networking (15) en una conferencia de 100 estudiantes?

Ejercicio 6: Supongamos una encuesta aplicada a 200 alumnos sobre el lenguaje más sencillo de programación. Se obtuvo: 80 prefieren Python, 100 prefieren C, 5 prefieren ambos. Cuál es la probabilidad de que a una persona prefiera C y otra probabilidad de que una persona prefiera Python

Ejercicio 7: En un juego al lanzar tres dados y anotar los resultados de sus caras superiores. Calcular la probabilidad del evento " la resta obtenida sea 5".

Ejercicio 8: Si las probabilidades de que un programador realice programas a tres, cuatro, cinco o más compañías en un mes de trabajo son 0.28, 0.24, 0.10, respectivamente. ¿Cuál es la probabilidad de que programe a cinco compañías más al otro mes de trabajo?

Ejercicio 9: La probabilidad de que un carro provincial normalmente salga a tiempo es P(B)=0.70, la probabilidad de que llegue a su lugar de destino a tiempo es P(C)=0.80 y la probabilidad de que salga y llegue a tiempo P (B y C) =0.75. Calcule: a) la probabilidad de que llegue a tiempo, dado que salió a tiempo

Ejercicio 10: Sea el experimento de tirar 5 dados al mismo tiempo

a.) Supongamos que sabemos que el resultado es impar, ¿cuál es la probabilidad de obtener un 13 en la suma de sus caras superiores?

b.) Supongamos que ahora se agrega un dado más y que el resultado es impar, ¿cuál es la probabilidad de obtener un 17 en la suma de sus caras superiores?

Ejercicio 11: En un proceso de control de calidad, el inspector selecciona una pieza terminada para inspección. El inspector a continuación determina si la pieza tiene algún defecto importante, un defecto menor o no tiene defectos. Considere la selección y la clasificación de la pieza como un experimento. Enliste los puntos muestrales para el experimento.

Ejercicio 12: Un experimento con tres resultados ha sido repetido 50 veces, y E1 ocurrió 20 veces, E2 13 veces y E3 17 veces. Asigne probabilidades a los resultados.

a. ¿Qué método utilizó?
b. ¿Por qué?

Ejercicio 13: El administrador de un gran multifamiliar aporta el siguiente estimado de probabilidad subjetiva sobre el número de departamento ocupados que existiría el mes que sigue:

Enliste los puntos muestrales de cada uno de los eventos siguientes y proporcione la probabilidad de:

a. Ningún departamento desocupado.
b. Por lo menos 4 departamentos estén desocupados.

Ejercicio 14: Para dos eventos A and B, P(A) = 0.5, P(B) = 0.60 y P(A∩B) = 0.40

a. Encuentre P(A/B).
b. Encuentre P(B/A)
c. ¿Son A y B independientes? ¿Por qué sí o por qué no?

Ejercicio 15: Suponga que un espacio muestra contiene 5 resultados experimentales igualmente posible: E1, E2, E3, E4, E5 Supongamos que:

A= {E1, E2}
B= {E3, E4}
C= {E2, E3, E5}

a. Encuentre P(A), P(B), y P(C).
b. Encuentre P (A U B). ¿Son A y B mutuamente excluyentes?
c. Encuentre Ac, Cc, P(Ac), y P(Cc).
d. Encuentre A U Bc y P (A U Bc).
e. Encuentre P (B U C).

Ejercicio 16: Supongamos que

A= al evento en que una persona corra 5 millas o más por semana
B= al evento en que una persona muera de una enfermedad cardíaca
C= al evento en que una persona muera de cáncer
Además, suponga que P(A) = 0.01, P(B) = 0.25, y P(C) = 0.20

a. ¿Son los eventos A y B mutuamente excluyentes? ¿Puede usted determinar P(A∩B)?
b. ¿Son los eventos B y C mutuamente excluyente? Encuentre la probabilidad de que una persona

muera de una enfermedad cardíaca o de cáncer.

c. Encuentre la probabilidad de que una persona muera de causas distintas al cáncer.

Ejercicio 17: Una empresa farmacéutica llevó a cabo un estudio para evaluar el efecto de una medicina para el alivio de alergias. Para tal estudio se seleccionaron 250 pacientes quienes presentaban síntomas que incluían ojos irritados y trastornos epidérmicos. Estos 250 pacientes recibieron el nuevo medicamento.
Los resultados del estudio son como sigue: 90 de los pacientes tratados experimentaron mejora total en los ojos, 135 se curaron de su afección cutánea y 45 experimentaron tanto alivio total en los ojos y curación total en la piel.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que un paciente que toma el medicamento experimente alivio en *uno de los dos síntomas o en ambos*?

Bibliografía

Anderson, D. R., Sweeney, D. J., & Williams, T. A. (2010). Estadística para administración y economía. México.

Canavos, G. C. (2013). Probabilidad y Estadística Aplicaciones y métodos.

Gasco, J. L. (2011). Probabilidad. In Estadistica Descriptiva. Valencia.

Luna, M., & Guillermo. (2010). Introducción a la lógica difusa. México.

Perez, J. M. (2010). Variables aleatorias discretas. In Estadística. Murcia.

RedDescartes. (2011). Matemáticas. Sevilla.

Reitsch, H. J. (2014). Estadística para negocios. Editorial Mc Graw Hill. 2ª. Edición.

Render, S. &. (2012). Concepto de probabilidades y aplicaciones.

S., P. D., & Fernández., S. P. (2010). Cálculo de probabilidades: nociones básicas. La Coruña.

Santalo, L. (2013). Probabilidad e inferencia estadística. Organización de los estados Americanos: 3ª . edición.

Snell, A. R. (2013). Introducción a la probabilidad.

Suay, F. M. (2012). Introduccion a la Probabilidad. España.

Torres, P. (2010). Probabilidad y estadística. Universidad de Los Andes, Colombia.

CAPÍTULO 4

PROBABILIDAD CONDICIONAL E INDEPENDENCIA

Introducción.

En este capítulo se definirá lo que es la probabilidad condicional e independencia de eventos.
Muchas veces en nuestra rutina diaria decimos o escuchamos expresiones como: “es muy probable que llueva” o es “es probable que hoy este muy soleado”. Estas frases, si la analizamos, tiene un grado de incertidumbre, ya que no puede predecirse el resultado final, es imposible poderlo determinar a simple vista o por conjeturas.

Ilustración 166: Dados

Posteriormente, analizaremos el tratamiento de la probabilidad condicional e independencia de eventos, fórmulas y conceptos.

Contenido.

- Probabilidad condicional.
- Independencia de eventos.

4.1. Probabilidad condicional.

Definición.

- Se conoce como probabilidad condicional a la probabilidad de que se dé un suceso A, conociendo, que también se da un suceso B. La probabilidad condicional se define formalmente como: $P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$; $P(B) > 0$, leyéndose "probabilidad de A dado B".

"Sean (Ω, ρ, P) un espacio probabilístico, sean dos eventos $A, B \in \rho$ y sus probabilidades sean $P(A)$ y $P(B)$ respectivamente. La probabilidad de que suceda el evento B condicionado por el evento A, representado por $P(B/A)$, es igual a la división entre las probabilidades $P(A \cap B)$ y $P(A)$." (Miguel, 2011)

"La probabilidad condicional $P(A/B)$ de un acontecimiento A dado otro acontecimiento B es simplemente la probabilidad de que suceda A sabiendo que B se ha realizado. Su definición formal es la siguiente:
$P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{PA \cap B}{P(B)}$, siempre y cuando $P(B) > 0$." (Epsilon, 2010)

4.1.1. Ejemplos.

➢ ***Ejemplo 1.***

Un hombre tiene una enfermedad hereditaria x ¿Determine la probabilidad de que su primer hijo obtenga dicha enfermedad?

Sea el espacio muestral el siguiente $\Omega = \{mM, mP, MM, MP\}$

1. Definición de eventos.

$$D = \{primogénito\ enfermo\} = \{mP\}$$
$$E = \{ser\ hombre\} = \{mp, MP\}$$

Ilustración 167: Ejemplo #1

2. Definición matemática.

$$P(D) = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

$$P(E) = \frac{2}{4} = 0{,}50$$

3. Desarrollo del problema.

$$P(D|E) = ?$$

$$P(E) = 0{,}5;$$

$$P(D|E) = \frac{0{,}25}{0{,}5} = 0{,}5$$

Si sabemos que es hombre, el espacio muestral ha cambiado, ahora es E. Por lo tanto, se puede calcular $P(D|E)$.

$$P(D|E) = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

- ***Ejemplo 2.***

Se han dado dos eventos aleatorios cualesquiera, D y E, $P(D) = 1/5$ $P(E) = 1/6$ y $p\ (D \cap E) = 1/7$. Determinar: $P(D|E)$

Solución:

1. Definición matemática.

$p(D) = 1/5$

$p(E) = 1/\ 6$

$p\ (D \cap E) = 1/7$

$$P(D|E) = \frac{p(D \cap E)}{p(E)}$$

Ilustración 168: Ejemplo #2

2. Desarrollo del problema.

$$P(D|E) = \frac{p\left(D \cap E\right)}{p(E)}$$

$$P(D|E) = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{1}{6}} = \frac{6}{7} = 0{,}86$$

- ***Ejemplo 3.***

En una conferencia hay 10 expositores, de los cuales 3 son ingenieros en Networking, 5 ingenieros en sistemas y 2 en teleinformática. Se escogen al azar 3 ingenieros para dar una charla. Calcular la probabilidad de que el primero sea ingeniero en teleinformática, y los otros dos ingenieros en sistemas.

1. Definir eventos.

$E1 = \{el\ primero\ sea\ ingeniero\ en\ teleinformática\};$
$E2 = \{el\ segundo\ sea\ ingeniero\ en\ sistemas\}$
$E3 = \{el\ tercero\ sea\ ingeniero\ en\ sistemas\}$

2. Definición matemática.

$P(E1) = 2/10$

$P(E2|E1) = 5/9;$

$P(E3|E1 \cap E2) = 4/8$

Ilustración 169: Ejemplo #3

3. Desarrollo del problema.

$P\ (E1 \cap E2 \cap E3) = 2/10\ x\ 5/9\ x\ 4/8 = 1/18$

4.2. Independencia de eventos.

Definición.

- Se conoce como independencia de eventos, sean A y B dos sucesos cualesquiera, cuando la probabilidad de que ocurra el evento A no está influida por que el evento B suceda o no. La independencia de eventos se define formalmente como: $P(A \cap$

"Sean dos eventos A y B, se dice que el evento A es independiente de B si $P(A \cap B) = P(A)\ P(B)$. " (Calvo & Chamorro, 2008)

"En la mayor parte de los casos la independencia de eventos se deduce matemáticamente del criterio del producto: A y B son independientes si y sólo sí $P(A \cap B) = P(\ A)P(B)$." (Miguel, 2011)

4.2.1. Ejemplos.

- ***Ejemplo 1.***

En un curso de programación gratuito. En un día, 40 personas que saben programar visitan el curso para aprender un nuevo lenguaje, de igual forma lo hacen 50 personas que buscan aprender a programar por primera vez en Python. Determine la probabilidad de que en un día una persona se acerque al curso para aprender a programar por primera vez y otras a aprender a programar en un nuevo lenguaje.

1. Definir eventos.

$E1 = \{personas\ que\ desean\ aprender\ a\ programar\ por\ primera\ vez\};$
$E2 = \{personas\ que\ desean\ aprender\ un\ nuevo\ lenguaje\}$

2. Definición matemática.

Ilustración 170: Ejemplo #1

$$P(E1) = \frac{50}{90} = 0{,}55$$

$$P(E2) = \frac{40}{90} = \ 0{,}44$$

3. Solución matemática.

$$P(E1 \cap E2) = P(\,E1)P(E2)$$
$$P(E1 \cap E2) = 0{,}55 * 0{,}44 = 0{,}24 = 24\%$$

- ***Ejemplo 2.***
  Se realiza una encuesta a 200 estudiantes de las carreras de ingeniería en teleinformática y licenciatura en sistemas de información para saber que lenguaje de programación preferían estudiar. De los cuales 90 escogieron Python y 150 saben programar en C. ¿Cuál es la probabilidad de sacar un estudiante que haya escogido Python en la encuesta y sepa programar en C?

1. Definir eventos.

$$E1 = \ \{personas\ que\ escogieron\ Python\ en\ la\ encuesta\};$$
$$E2 = \{personas\ que\ saben\ programar\ en\ C\}$$

2. Definición matemática


Ilustración 171: Ejemplo # 2

$$P(E1) = \frac{90}{200} = 0{,}45$$

$$P(E2) = \frac{150}{200} = \ 0{,}75$$

3. Solución matemática.

$$P(E1 \cap E2) = P(\,E1)P(E2)$$
$$P(E1 \cap E2) = 0{,}45 * 0{,}75 = 0{,}34 = 34\%$$

- ***Ejemplo 3.***
  ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante de ingeniería en sistemas pueda aprender varios lenguajes de programación y sepa programar en C es de 0,40, de que una persona sepa programar en Python 0,58 y de que una persona sepa programar en C# es de 0,10?

1. Definir eventos.

$$E1 = \ \{estudiante\ que\ sabe\ programar\ en\ c\};$$
$$E2 = \{estudiante\ que\ sabe\ programar\ en\ Python\}$$
$$E3 = \{estudiante\ que\ sabe\ programar\ en\ c\#\}$$

2. Definición matemática.

$P(E1) = 40\%$
$P(E2) = 58\%$
$P(E3) = 10\%$

3. Solución matemática.

$P(E1 \cap E2 \cap E3) = P(E1)P(E2)P(E3)$
$P(E1 \cap E2 \cap E3) = 0{,}40 * 0{,}58 * 0{,}10 = 0{,}0232$

Ilustración 172:Ejemplo 3

4.3. Ejercicios propuestos.

Ejercicio 1: Calcule la probabilidad de conseguir un 4 al tirar un dado sabiendo que ha salido par.

Ejercicio 2: Se lanza una moneda 4 veces, ¿Cuál sería la probabilidad de obtener 4 sellos dado que salió por lo menos un sello?

Ejercicio 3: Se arrojan 2 dados, si la suma de los números que aparecen es de por lo menos 9.

a.) determine la probabilidad de que en el segundo dado aparezca el número 4

Ejercicio 4: Se arrojan 2 dados, si la suma de los números que aparecen es de por lo menos 9.

a.) Calcule la probabilidad de que ambos números sean impares

Ejercicio 5: En el examen de admisión a la universidad Guayaquil las carreras que más han llamado la atención de los aspirantes “medicina” y “ingeniería civil”. El total de las personas que aplicaron a esas carreras son 2000, de las cuales 1000 aplicaron a medicina y 900 a ingeniería civil. Cuál es el porcentaje de probabilidad de que los aspirantes hayan aplicado a ambas carreras.

Ejercicio 6: Se sabe por estudios previos que el 0,1% de la población tiene problemas vasculares. Un estudio sobre individuos con problemas vasculares revela que el 20% de ellos son placas de ateroma. Si el 10% de los individuos con placas de ateroma están expuestos a

muerte súbita por desprendimiento de trombos ¿qué probabilidad tiene un individuo cualquiera de estar expuesto a muerte súbita por desprendimiento de trombos de una placa de ateroma?

Ejercicio 7: En una determinada materia el 1% de los estudiantes están bajos.
La probabilidad de que al analizar a un buen estudiante y erróneamente salga bajo es el 1%.
La probabilidad de que al analizar un estudiante bajo y salga erróneamente con notas altas es el 1%.

a.) Calcular la probabilidad de que una persona esté realmente baja si en un análisis sale que está bajo.

Ejercicio 8: Carlos tiene 5 ediciones libros de programación los cuales cada edición tiene 2 volúmenes: 2 en de programación en C, 1 de programación en Python, 2 programación en C#. Hoy quiere usar llevar 1 edición de programación en C a la universidad, pero tiene prisa para llegar a clases, por lo que agarra una edición al azar. Si no es el de programación en C, lo devolverá al librero. Si continúa agarrando ediciones aleatoriamente, ¿Cuál es la probabilidad de sacar una edición de programación en C en su cuarto intento?

Ejercicio 9: Defina los eventos y calcule la probabilidad de que al sacar una carta de un mazo:

a) La carta seleccionada sea un corazón negro.

b) La carta seleccionada sea un trébol negro.

Ejercicio 10: En una universidad se realiza una feria tecnológica en un piso hay 5 stands, 2 son de la materia de circuitos electrónicos, 2 de la materia de programación y 1 de la materia de matemáticas. ¿Cuál es la probabilidad de que entren 10 personas, por lo menos a 1 stand de circuitos electrónicos y otras 10 personas no lo hagan?

Ejercicio 11: Dos personas eligen al azar, cada una de ellas, un número del 0 al 9. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos personas no piensen el mismo número?

Ejercicio 12: En unas oposiciones, el temario consta de 87 temas. Se eligen tres temas al azar de entre los 85. Si un opositor sabe 36 de los 86 temas, ¿cuál es la probabilidad de que sepa al menos uno de los tres temas?

Ejercicio 13: Tenemos para enviar tres cartas con sus tres sobres correspondientes. Si metemos al zar cada carta en uno de los sobres, ¿cuál es la probabilidad de que al menos una de las cartas vaya en el sobre que le corresponde?

Ejercicio 14: Extraemos dos cartas de una baraja española (de cuarenta cartas). Calcula la probabilidad de que sean:

- **a)** Las dos de oros.
- **b)** Una de copas u otra de oros.
- **c)** Al menos una de oros.
- **d)** La primera de copas y la segunda de oro.

Ejercicio 15: En un pueblo hay 200 jóvenes; 50 de los chicos y 45 de las chicas juegan al tenis. El total de chicas en el pueblo es de 55. Si elegimos un joven de esa localidad al azar:

- **a)** ¿Cuál es la probabilidad de que sea chico?
- **b)** Si sabemos que juega al tenis, ¿cuál es la probabilidad de que sea chica?
- **c)** ¿Cuál es la probabilidad de que sea un chico que no juegue al tenis?

Ejercicio 16: Un estudiante responde al azar 8 preguntas de verdadero y falso en un examen. ¿Cuál es la probabilidad de que acierte todas las preguntas?

Ejercicio 17: Un restaurante ofrece un almuerzo en que se pueden elegir 4 entradas, 7 platos de fondo y 5 postre Si no me gustan 7 de los platos de fondo y 5 de los postres. ¿Cuál es la probabilidad de que me toque un menú de mi agrado si la elección es al azar?

Ejercicio 18: En una empresa trabajan hombres y mujeres, además se sabe que un 15% de los empleados se han perfeccionado en el extranjero. Si el 35% de las son mujeres, ¿cuál es la probabilidad de que al escoger una persona de la empresa, esta sea mujer y se haya perfeccionado en el extranjero?

Ejercicio 19: Ante un examen, un alumno sólo ha estudiado 16 de los 25 temas correspondientes a la materia del mismo. Éste se realiza en trayendo al azar dos temas y dejando que el alumno escoja uno de los dos para ser examinado del mismo. Hallar la probabilidad de que el alumno pueda elegir en el examen uno de los temas estudiados.

Bibliografía

Calvo, P. L., & Chamorro, I. (2008). Probabilidad condicionada. En Estadistica e investigación operativa. Sevilla.

Epsilon. (2010). Razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza de estadística. En Condicional, comprensión intuitiva de la probabilidad. España.

Miguel, C. G. (2011). Evaluación de conocimientos y recursos didácticos en la formación de profesores sobre probabilidad condicional. Granada.

Introducción

Ilustración 173: Thomas Bayes.

El teorema de Bayes permite realizar el cálculo de probabilidades después de haberse efectuado un experimento que se basa en los sucesos observados.

Podemos determinar, que con el teorema de Bayes se resuelve el problema conocido como de la probabilidad contraria o inversa. Esto es, considerar probabilísticamente las posibles condiciones que rigen el supuesto suceso observado.

En la vida cotidiana las personas se encuentran con incertidumbres de diferentes grados relacionándolos con los enfoques más comunes para el cálculo de probabilidades, en términos de experimentos, espacio muestral, sucesos, etc., llegando a la formalización axiomática, junto con la probabilidad condicionada y los teoremas de probabilidad total y de Bayes.

Contenido

- Sistema exhaustivo y excluyente de eventos.
- Teorema de probabilidad total.
- Teorema de Bayes.

5.1. Sistema exhaustivo y excluyente de eventos.

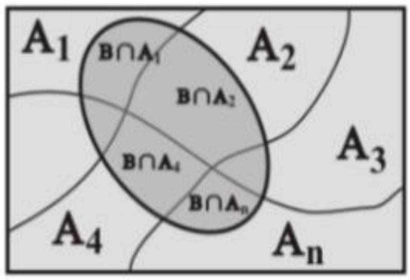


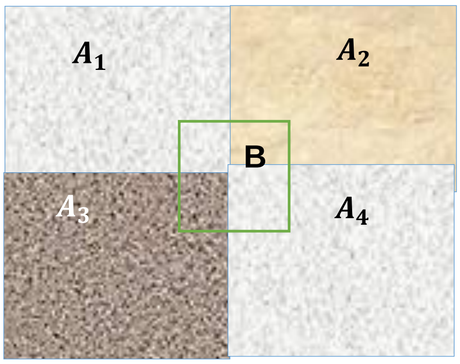
Ilustración 174:Diagrama de ven de un evento en varios subconjuntos mutuamente excluyente.

Definición

- Para cualquier evento, tenemos que éste sucede o no sucede. De modo que los eventos no son mutuamente excluyentes y exhaustivos. Si dos eventos no son mutuamente excluyentes, es posible que ambos se presenten al mismo tiempo. Es exhaustiva si $S = A\_1 \cup\ A\_2 \cup..\cup\ A\_n$, y $A\_i \cup\ A\_j = \emptyset$

"La exclusión mutua de los sucesos A y B significa que $\boldsymbol{A \cap B} = \emptyset$, y por tanto se cumple que $\boldsymbol{P(A \cap B) = 0}$. Por el contrario, la independencia significa que $\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A).P(B)}$. Por consiguiente, dos sucesos mutuamente exluyente de probabilidad positiva no son independientes uno de otro." (Maibaum., 2012)

"Una colección de eventos $\boldsymbol{A_1, A_2, A_3 \ldots . A_n}$ es exhaustiva y mutumante excluyente si la unión de todos forman el espacio muestral $\boldsymbol{S}$, y sus intersecciones son mutuamente excluyentes para cualquier para $\boldsymbol{A_i} \cap \boldsymbol{A_j}$ con $\boldsymbol{i \neq j}$." (Alvarado, 2013.)



$B = (B \cap\ A_1) \cup (B \cap A_2) \cup (B \cap A_3) \cup \ldots \cup\ (B \cap A_n)$

ahora bien, los conjuntos $B \cap A_i$ son disjuntos dos a dos, ya que en caso contrario los A_i tampoco lo serían. En consecuencia

$P(B) = P(B \cap\ A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3) + \cdots +\ P(B \cap A_n)$

5.1.1. Ejemplos.

➢ ***Ejemplo 1.***

En bodega se han guardado 4 Discos duros en marca seagate, 3 en marca Toshiba, y un disco duro en una segunda bodega, 3 en marca seagate y 5 en marca toshiba. Se saca un disco duro de la primera bodega, sin verla, se guarda en la segunda. ¿Cuál es la probabilidad de que un disco duro que se extraiga al azar de la segunda bodega sea de marca toshiba?

Solución:
B = El segundo disco duro extraído de la segunda bodega sea de marca toshiba.

A = El disco duro transferido es en marca toshiba.

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{A^C}$
$\boldsymbol{P(A) = \frac{3}{7} = 0.43}$	$\boldsymbol{P(A^C) = \frac{4}{7} = 0.57}$

Entonces $\boldsymbol{P(B/A) = 6/9}$ puesto que habrán tre disco duros en marca seagate y 6 discos duros en marca toshiba en la bodega 2, al momento de la segunda extracción si es que A ocurre.

Análogamente $\boldsymbol{P(B|A^C) = 5/9}$. También tenemos que $\boldsymbol{P(A) = 3/7}$ y en consecuencia $\boldsymbol{P(A^C) = 4/7}$.

$$\boldsymbol{P(B) = P(A \cap B) + (A^C \cap B)}$$
$$\boldsymbol{= P(A)P(B|A) + P(A^C)\,P(B|A^C)}$$
$$\boldsymbol{= \left(\frac{3}{7}\right)\left(\frac{6}{9}\right) + \left(\frac{4}{7}\right)\left(\frac{5}{9}\right) = \frac{38}{63}}$$

La probabilidad de que un disco duro extraído al azar de la segunda bodega sea Toshiba es de $38/63 = 0.6032$.

- ***Ejemplo 2.***

En la Facultad de Ingeniería Industrial, de la universidad de Guayaquil, el 70% de los alumnos son varones. De ellos el 20% son de la carrera de Ing. en teleinformática. De las mujeres son de la carrera de Ing. en Teleinformática el 10%.
¿Qué porcentaje de estudiantes de la carrera de Ing. en Teleinformática hay?

H	M
P(H)=0.7	P(M)=0.3
$\boldsymbol{P(T \setminus H) = 0.2}$	$\boldsymbol{P(T \setminus M) = 0.1}$

$$\boldsymbol{P(T) = P(H \cap T) + (M \cap T)}$$

$$\boldsymbol{= P(H)P(T|H) + P(M)\, P(T|M)}$$
$$\boldsymbol{= (0.7)(0.2) + (0.3)(0.1) = 0.17}$$

Tenemos un 17% de estudiantes que son de la carrera de Ing. en Teleinformática.

- **Ejemplo 3.**

Tengo una carro de compras llena de bananas y sandias, de las cuales hay 20 bananas y 10 sandias. ¿Qué fruta es más probable que saque al azar del carro de compras?

Para este ejemplo tenemos que 30 es el total de frutas en el carro de compras; es decir los casos posibles. Para calcular la probabilidad de sacar una sandía mis casos favorables son 10 puesto que existen sólo 10 sandías. Así, aplicando la fórmula obtenemos que:

	S
P(B)=0.66	P(S)=0.33

$\boldsymbol{P(S) = 10/30 = 1/3 = 33.3\%}$ probable

Calculando igual, la probabilidad de sacar es:
$\boldsymbol{P(B) = 20/30 = 2/3 = 66.7}\%$ probable.

Como 66.7% es mayor que 33.3%, es más probable que saque una Banana, pues hay más bananas que sandías en el carro de compras.

5.2. Teorema de probabilidad total.

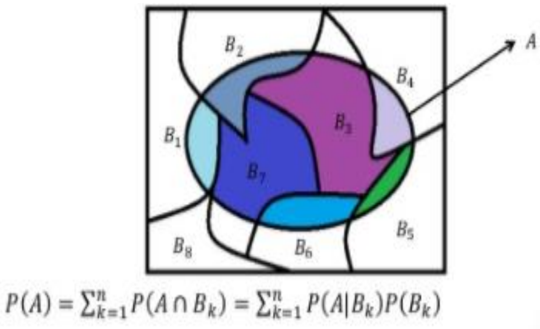


Ilustración 175:Representación de teorema de probabilidad Total.

Definición

- El teorema de probabilidad total podemos definir que es el que nos permite obtener la probabilidad de un evento a partir de las probabilidades condicionadas. $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)\, P(A \setminus B_i)$

(P. Ibarrola, 2009), Podemos determinar que $\boldsymbol{E}$ es nuestro experimento aleatorio y Ω es el espacio muestral, si los eventos $\boldsymbol{E_1}, \boldsymbol{E_2}, \ldots .\boldsymbol{E_n}$ son incompatibles dos a dos y su unión es Ω, entonces siendo $\boldsymbol{A}$ un evento a $\boldsymbol{E}$, es:

$$\boldsymbol{P(A)} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(\boldsymbol{S_i})\mathbf{P}(\mathbf{A} \setminus \boldsymbol{S_i}) =$$

$$\boldsymbol{P(A)} = \mathbf{P}(\boldsymbol{S_1})\mathbf{P}(\mathbf{A} \setminus \boldsymbol{S_1}) + \mathbf{P}(\boldsymbol{S_2})\mathbf{P}(\mathbf{A} \setminus \boldsymbol{S_2}) + \cdots + \mathbf{P}(\boldsymbol{S_n})\mathbf{P}(\mathbf{A} \setminus \boldsymbol{S_n})$$

(Webster, 2009), "Sea $\boldsymbol{B_i}$ $(\boldsymbol{i} = \mathbf{1}, \ldots, \boldsymbol{n})$ n hechos no nulos mutuamente excluyentes y exhaustivos (es decir, una partición del espacio muestral) y sea $\boldsymbol{A}$ un suceso definido en el mismo espacio muestral; dado que las probabilidades marginales, $\boldsymbol{P(B_i)}$, y las probabilidades condicionales $\boldsymbol{P(A/B_i)}$, para todas las $\boldsymbol{i}$, son conocidas, la probabilidad marginal de $\boldsymbol{A}$."

5.2.1. Ejemplos.

- **Ejemplo 1.**

  Se sabe que el 65% de los estudiantes no culminan sus carreras debido a que no trabajan y su situación económica no es buena, el 25% no tiene el apoyo de un familiar, y el resto por otras causas, (forman un hogar...etc.). En estos casos, el resultado es nefasto el 30% de las veces en el primer caso, el 20% en el segundo y el 5% en el tercero.

  a) Calcular la probabilidad de que uno de estos casos tenga resultado nefasto.

  Solución:

A_1 = al suceso "No terminar la carrera debido a que no tiene ingreso económico, es decir, no trabaja"
A_2 = al suceso "No tiene el apoyo de un familiar"
A_3 = al suceso "No termina la carrera por otras causas".


Estos sucesos son incompatibles dos a dos y su unión es el espacio muestral, por lo que se verifican las hipòtesis del teorema de la probabilidad total. Sea $\boldsymbol{N}$ el suceso "tener resultado nefasto"

$$P(N) = \mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(\mathrm{N} \setminus A_1) + \mathrm{P}(A_2)\mathrm{P}(\mathrm{N} \setminus A_2) + \mathrm{P}(A_3)\mathrm{P}(\mathrm{N} \setminus A_3) =$$
$$P(N) = (0.65)(0.3) + (0.25)(0.2) + (0.1)(0.05) = 0.25$$

La probabilidad de tener un resultado nefasto es de 25%

- **Ejemplo 2.**

Una Empresa multinacional elabora sus piezas en 3 plantas. El porcentaje de piezas defectuosas y el total de producción de cada planta se observa en la siguiente tabla:



	F_1	F_2	F_3
Producción	0.4	0.35	0.25
Defectuosas	0.2	0.3	0.1

Calcular la probabilidad de que una pieza escogida al azar sea defectuosa.

$$F_1 = \{piezas\ fabricadas\ en\ la\ planta\ 1\}$$
$$F_2 = \{piezas\ fabricadas\ en\ la\ planta\ 2\}$$
$$F_3 = \{piezas\ fabricadas\ en\ la\ planta\ 3\}$$

Una pieza se fabrica en una sola planta $F_i \cap F_j = \emptyset$
Cualquier pieza se fabrica en una de las plantas $F_1 \cup F_2 \cup F_3 = E$

Consideramos $G = \{Piezas\ defectuosas\}$

$P(G) = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{P}(F_1)\mathbf{P}(\mathbf{G} \setminus F_1) + \mathbf{P}(F_2)\mathbf{P}(\mathbf{G} \setminus F_2) + \mathbf{P}(F_3)\mathbf{P}(\mathbf{G} \setminus F_3)$

$P(G) = (0.40)(0.02) + (0.35)(0.03) + (0.25)(0.01)$

$P(G) = 0.008 + 0.0105 + 0.00025 = 0.01875$

$La\ probabilidad\ de\ escoger\ una\ pieza\ defectuosa\ es\ de\ 1.875\%$

5.3. Teorema de Bayes.

Ilustración 176: Thomas Bayes obtuvo la determinación de la probabilidad de los eventos que ocurren.

Definición

- El teorema de Bayes se basa en un acontecimiento en la que podemos calcular las probabilidades que suceden en una serie de eventos A_j.
- $P\left(A_j \setminus B\right) = \frac{P(A_j \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_j)\, P(B_i \setminus A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)\, P(B \setminus A_i)}$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{P}(B_i \cap \mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{P}(B_i)\, \mathbf{P}(\mathbf{A} \setminus B_i)$$

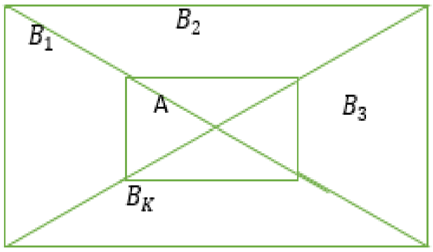


Ilustración 177: Partición de un espacio muestral.

(Martín-Pliego, 2015). "El teorema de Bayes nos permite determinar la probabilidad que que exista un acontecimiento, A_j, condicionado a que el suceso B ya ha ocurrido."

(Canavos, 2013). "Si los eventos $B_1, B_2, \ldots, B_k$ constituyen una partición del espacio muestral tal que para $i = 1, 2, \ldots, k$, entonces para cualquier evento A del espacio muestral se tiene el teorema de Bayes."

5.3.1. Ejemplos.

➢ ***Ejemplo 1.***
En cierta planta de producción cacao, tres máquinas, M1, M2 y M3, cargan 30%, 45% y 25% de los productos, respectivamente. Se sabe de la experiencia pasada que 2%, 3% y 2% de los productos elaborados por cada máquina, respectivamente, tiene defectos.

Ahora, supongamos que se selecciona de forma aleatoria un producto terminado, ¿cuál es la probabilidad de que este producto esté defectuoso?

Sean los siguientes eventos:

$\boldsymbol{D = \{ el\ producto\ est\acute{a}\ defectuoso\}}$
$\boldsymbol{M_1 = \{ el\ producto\ est\acute{a}\ elaborado\ por\ la\ m\acute{a}quina\ 1\}}$
$\boldsymbol{M_2 = \{ el\ producto\ est\acute{a}\ elaborado\ por\ la\ m\acute{a}quina\ 2\}}$
$\boldsymbol{M_3 = \{el\ producto\ est\acute{a}\ elaborado\ por\ la\ m\acute{a}quina\ 3\}}$

Al aplicar el teorema de la probabilidad total, podemos escribir:

$$\mathbf{P(D) = P(\boldsymbol{M_1})P(D|\boldsymbol{M_1}) + P(\boldsymbol{M_2})P(D|\boldsymbol{M_2}) + P(\boldsymbol{M_3})P(D|\boldsymbol{M_3})}$$

$$\mathbf{P(\boldsymbol{M_1})P(D|\boldsymbol{M_1}) = (0.3)(0.02) = 0.006}$$

$$\mathbf{P(\boldsymbol{M_2})P(D|\boldsymbol{M_2}) = (0.45)(0.03) = 0.0135}$$

$$\mathbf{P(\boldsymbol{M_3})P(D|\boldsymbol{M_3}) = (0.25)(0.02) = 0.05}$$

y de aquí $\boldsymbol{P(D) = 0.006 + 0.0135 + 0.005 = 0.0245}$.

$\boldsymbol{La\ probabilidad\ de\ que\ este\ producto\ est\acute{e}\ defectuoso\ es\ de\ 2.45\%}$.

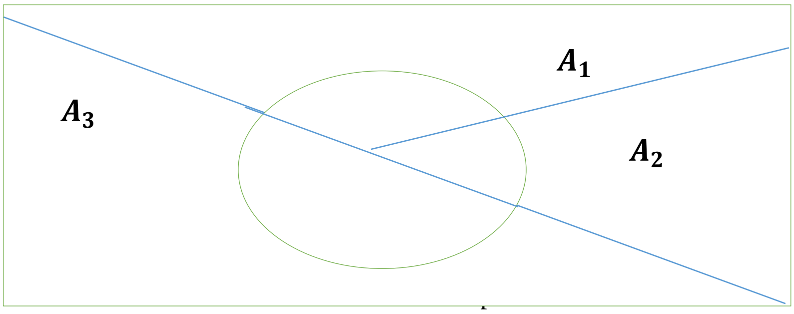
- ***Ejemplo 2.***

  Una empresa de textiles tiene tres delegaciones, Ecuador, Brazil y Venezuela. De un determinado fármaco se produce el 45% en la delegación de Ecuador, el 30% en Brazil, y el 25% en Venezuela. Del total de los fármacos, son defectuosos el 5% de los producidos en Ecuador, el 3% en Brazil y el 4% en Venezuela. Calcular:

1. Probabilidad de que un fármaco sea defectuoso.
2. Si un fármaco es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido producido por la delegación de Venezuela?

$\boldsymbol{A_1}$= Producido en Ecuador	$\boldsymbol{A_2}$=Producido en Brazil	$\boldsymbol{A_3}$=Producido en Venezuela
$\boldsymbol{P(A_1) = 0.45}$	$\boldsymbol{P(A_2) = 0.30}$	$\boldsymbol{P(A_3) = 0.25}$
$\boldsymbol{P(B\|A_1) = 0.05}$	$\boldsymbol{P(B\|A_2) = 0.03}$	$\boldsymbol{P(B\|A_3) = 0.04}$



1. Literal.

$\mathbf{P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3)}$

$\boldsymbol{P(B) = (0.45)(0.05)(0.30)(0.03)(0.25)(0.04) = 0.0415}$

Probabilidad de que un fármaco sea defectuoso es de 4.15%

2. Literal.

$$\mathbf{P}(A_3|B) = \frac{\mathbf{P}(A_3)\mathbf{P}(B|A_3)}{P(B)} = \frac{(0.25)(0.04)}{0.0415} = 0.241$$

La probabilidad de que haya sido producido por la delegación de Venezuela es de 24.1%.

- ***Ejemplo 3.***

En una población el 51% de las personas son mujeres, el 18% tienen azúcar y el 10% ambas cosas. Obtener:

1. Probabilidad de que una persona tenga la azúcar si es mujer.
2. Probabilidad de ser hombre si se tiene azúcar.
3. Probabilidad de ser mujer si no se tiene azúcar.

$A = Es\ mujer$	$B = Tener\ azúcar$
$P(A) = 0.51$	$P(B) = 0.18$

$\mathbf{P}(A \cap B) = 0.10$

1. Literal.

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}) = \frac{\mathbf{P}(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B})}{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A})} = \frac{\mathbf{0.10}}{\mathbf{0.51}} = \mathbf{0.19}$$

Probabilidad de que una persona tenga la azúcar si es mujer es de 19%

2. Literal.

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{C}}|\boldsymbol{B}) = \mathbf{1} - \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}) = \mathbf{1} - \mathbf{0.555} = \mathbf{0.445}$$

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}) = \frac{\mathbf{P}(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B})}{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{B})} = \frac{\mathbf{0.10}}{\mathbf{0.18}} = \mathbf{0.555}$$

Probabilidad de ser hombre si se tiene azúcar es de 55%

3. Literal.

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{A} \setminus \boldsymbol{B}^{\boldsymbol{C}}) = \frac{\mathbf{P}(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{C}})}{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{C}})} = \frac{\mathbf{0.4131}}{\mathbf{0.82}} = \mathbf{0.5037}$$

$$\frac{\mathbf{P}(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{C}})}{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{B})} = \mathbf{P}(\boldsymbol{A})\mathbf{P}(\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{C}} \setminus \boldsymbol{A}) = \mathbf{P}(\mathbf{A})\big(\mathbf{1} - \boldsymbol{P}(\mathbf{B} \setminus \boldsymbol{A})\big) = (\mathbf{0.51})(\mathbf{1} - \mathbf{0.19}) = \mathbf{0.4131}$$

Probabilidad de ser mujer si no se tiene azúcar es de 41.31%

5.4. Ejercicios propuestos.

Ejercicio 1: Un analista de bolsa, antiguo miembro de la Compañía Bolsa de Valores, verifica la proforma de las acciones de un gran número de compañías. Encuentra que el 25 % experimentó un crecimiento superior a la media, el 25 % inferior y el 50 % restante se mantuvieron alrededor de la media. Para la próxima campañía, califica el 40 % de los valores que crecieron por encima de la media como valores recomendados, al igual que un 20 % de los que crecieron alrededor de la media y un 10 % de los que tuvieron un crecimiento inferior.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un valor sea recomendado?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un valor clasificado como recomendado por el analista haya crecido por encima de la media del mercado?

Ejercicio 2: En la sala de medicina general del Hospital Universitario, el 60% de los pacientes son niñas. De los niños el 35% son menores de 24 meses. El 20% de las niñas tienen menos de 24 meses. Un Doctor que ingresa a la sala selecciona un infante al azar.

a.) Determine el valor de la probabilidad de que sea menor de 24 meses.
Si el infante resulta ser menor de 24 meses. Determine la probabilidad que sea una niña.

Solución:
Se definen los sucesos:
Suceso X: seleccionar una niña.
Suceso *Y*: seleccionar un niño.
Suceso *Z*: infante menor de 24 meses.

Ejercicio 3: Un Analista en sistemas dispone de tres impresoras para realizar impresiones. El uso que le da a cada equipo es de 25% al primero, 35% el segundo en y 40% el tercero. Se sabe que los aparatos tienen probabilidades de error en la impresión de 1%, 2% y 3% respectivamente. Un usuario busca su trabajo impreso y observa que tiene un error. Determine la probabilidad de que se ha usado el primer aparato.

Solución:
Se definen los sucesos:
Suceso *A*: seleccionar el primer aparato.
Suceso *B*: seleccionar el segundo aparato.
Suceso *C*: seleccionar el tercer aparato.
Suceso *D*: seleccionar un resultado con error.

Se puede observar que la pregunta es sobre determinar la probabilidad de que un documento mal impreso sea del primer aparato, es decir, ya ha ocurrido el error. Por lo tanto, debemos recurrir al teorema de Bayes. Claro está, que es necesario de igual forma obtener la probabilidad de que los aparatos produzcan un resultado erróneo, por lo tanto:

Ejercicio 4: Dos cajas contienen memoria RAM DDR3 de 8 GB y memorias RAM DDR3 de 4GB. Suponga que la caja A contiene 60 memoria RAM DDR3 de 8 GB y 40 memorias RAM DDR3 de 4 GB. La caja B contiene 10 memoria RAM DDR3 de 8 GB y 20 memorias RAM DDR3 de 4 GB. Se extrae una memoria y resulta ser DDR3 de 8 GB. ¿Cuál es la probabilidad que se haya sacado de la caja B?

Ejercicio 5: Una fábrica de notebooks tiene dos líneas de producción. La línea 1 produce 6500 unidades diarias y la línea 2 produce 3500 por día. Por otra parte, la línea 1 tiene un 2% de producción defectuosa y la línea 2 solamente el 1% de partes defectuosas. Si se selecciona una notebook al azar y es defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que provenga de la línea 1?

Ejercicio 6: Supongamos que:

$\boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{Al\ evento\ en\ que\ una\ persona\ come\ 1000\ calorias\ o\ más\ por\ semana}\}$
$\boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{Al\ evento\ en\ que\ una\ persona\ tenga\ obesidad.}\}$
$\boldsymbol{C} = \{\boldsymbol{Al\ evento\ en\ que\ una\ persona\ muera\ de\ infarto\ del\ corazón.}\}$

Además, suponga que:
$\boldsymbol{P(A)\ =\ 0.01}$
$\boldsymbol{P(B)\ =\ 0.25}$
$\boldsymbol{P(C)\ =\ 0.20}$

a) ¿Son los eventos $\boldsymbol{A\ y\ B}$ mutuamente excluyentes? ¿Puede usted determinar $\boldsymbol{P(A \cap B)}$?

b) ¿Son los eventos $\boldsymbol{B\ y\ C}$ mutuamente excluyente? Encuentre la probabilidad de que una persona tenga obesidad.

c) Encuentre la probabilidad de que una persona muera de causas distintas al infarto del corazón.

Ejercicio 7: Un estudio de mercado que realizó la empresa Mc Donald a 800 personas reveló los siguientes hechos sobre la capacidad de recordar un anuncio en el periódico de un producto en particular y la adquisición de dicho producto. Digamos que T es el evento de la venta de la persona que recuerda la publicidad en el periódico y B el evento de adquirir o comprar el producto.

	Pudo recordar la publicidad del periódico	No pudo recordar la publicidad del periódico	Totales
Adquirió el producto	$\boldsymbol{160}$ $(\boldsymbol{0.2})$	$\boldsymbol{80}$ $(\boldsymbol{0.1})$	$\boldsymbol{240}$ $(\boldsymbol{0.3})$
No adquirió el producto	$\boldsymbol{240}$ $(\boldsymbol{0.3})$	$\boldsymbol{320}$ $(\boldsymbol{0.4})$	$\boldsymbol{560}$ $(\boldsymbol{0.7})$
Totales	$\boldsymbol{400}$ $(\boldsymbol{0.5})$	$\boldsymbol{400}$ $(\boldsymbol{0.5})$	$\boldsymbol{800}$

a) Encuentre $\boldsymbol{P(PE), P(B), y\ P(PE|B)}$

b) ¿Son $\boldsymbol{PE\ y\ B}$ eventos mutuamente excluyentes?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona que recuerde haber visto la publicación en el periódico haya adquirido el producto?

d) ¿Son $\boldsymbol{PE\ y\ B}$ eventos independientes?

e) Comente sobre el valor de la publicidad en función con su relación a la adquisición del producto.

Ejercicio 8: En la empresa "Gráficos Nacionales S.A.", el 20% de los empleados con periodistas y el otro 20% son Ingenieros en Diseño gráfico. El 75% de los periodistas tienen el cargo del área de publicidad y el 50% de los Ingenieros de Diseño Gráfico también, mientras que los no periodistas y los no Ingenieros en Diseño gráfico solamente ocupa un puesto del área de publicidad. ¿Cuál es la probabilidad de que un empleado del área de publicidad elegido al azar sea periodista?

Ejercicio 9: La probabilidad de que haya un incendio en una empresa que dispone de alarma es de 0.1. La probabilidad de que suene este si se ha producido algún incendio es de 0.97 y la probabilidad de que suene si no ha sucedido ningún incendio es 0.02.

En el supuesto de que haya funcionado la alarma, ¿Cuál es la probabilidad de que no haya habido ningún incendio?

Ejercicio 10: Supongamos que A es un evento en el que una persona usa el medio de transporte de hacia y desde el trabajo sea en metrovía y B es un evento en que el medio de transporte de una persona hacia y desde el trabajo sea en carro propio.

Suponga que en la ciudad Guayaquil $P(A) = 0.45\ y\ P(B) = 0.35$

a.) ¿Son los eventos $A\ y\ B$ mutuamente excluyentes? ¿Cuál es la probabilidad de que una persona utilice la metrovía o carro propio al ir y al regresar del trabajo?

b.) Encuentre la probabilidad de que el medio de transporte de una persona sea algún medio distinto a su carro propio.

Ejercicio 11: La prevalencia de infarto cardíaco para hipertensos es del 0,3% y para no hipertensos del 0,1%. Si la prevalencia de hipertensión en una cierta población es del 25% ¿Cuál es la prevalencia del infarto en esa población?

1) Un médico cirujano se especializa en cirugías estéticas. Entre sus pacientes, el 20% se realizan correcciones faciales, un 35% implantes mamarios y el restante en otras cirugías correctivas. Se sabe además, que son de género masculino el 25% de los que se realizan correcciones faciales, 15% implantes mamarios y 40% otras cirugías correctivas. Si se selecciona un paciente al azar, determine:

   a. Determine la probabilidad de que sea de género masculino
   b. Si resulta que es de género masculino, determine la probabilidad que se haya realizado una cirugía de implantes mamarios.

Ejercicio 12: Un Doctor dispone de tres equipos electrónicos para realizar eco-sonogramas. El uso que le da a cada equipo es de 25% al primero, 35% el segundo en y 40% el tercero. Se sabe que los aparatos tienen probabilidades de error de 1%, 2% y 3% respectivamente. Un paciente

busca el resultado de una ecografía y observa que tiene un error. Determine la probabilidad de que se ha usado el primer aparato.

2) En cierto país donde la enfermedad X es endémica, se sabe que un 12% de la población padece dicha enfermedad. Se dispone de una prueba para detectar la enfermedad, pero no es totalmente fiable, ya que, da positiva en el 90% de los casos de personas realmente enfermas; y da positiva en el 5% de personas sanas. ¿Cuál es la probabilidad de que esté sana una persona a la que la prueba le ha dado positiva?

3) Una fábrica de piezas para aviones está organizada en tres secciones. La sección A fabrica el 30% de las piezas, la sección B el 35%, mientras que el resto se fabrican en la sección C. La probabilidad de encontrar una pieza defectuosa es del 0.01, 0.015 y 0.009 según se considere la sección A, B o C, respectivamente. a) Calcula la probabilidad de que una pieza elegida al azar salga defectuosa de dicha fábrica. b) Si elegida una pieza al azar es defectuosa, ¿qué probabilidad hay de que sea de la sección B?

Bibliografía

Alvarado, A. A. (2013). *Probabilidad y Estadística*.

Canavos, G. C. (2013). Probabilidad y Estadística Aplicaciones y métodos.

GERT, M. (2012). Teoría de probabilidades y estadística matemática.

Martín-Pliego, F. y.-M. (2015). Fundamentos de Probabilidad.

P. Ibarrola, L. P. (2009). Teoría de la Probabilidad.

Render, S. &. (2012). Concepto de probabilidades y aplicaciones.

S., P. D., & Fernández., S. P. (2010). Cálculo de probabilidades: nociones básicas. La Coruña.

Santalo, L. (2013). Probabilidad e inferencia estadística. Organización de los estados Americanos: 3ª . edición.

Higgins, P. (2008). *Number Story: From Counting to Cryptography*. New York: Copernicus.

Webster, A. (2009). Estadística Aplicada a la Economía y los Negocios. Bogotá: 3era Edición.

Introducción
En el siguiente capítulo se aprenderá a denominar la variable aleatoria discreta aquella que solo puede tomar un numero finito de valores dentro de un intervalo.

Contenido

- Soporte de una Variable Aleatoria Discreta.
- Variable Aleatoria Discreta.
- Distribución de Probabilidad de una Variable Aleatoria Discreta.
- Distribución de Probabilidad Acumulada de una Variable Aleatoria Discreta.
- Valor Esperado de una Variable Aleatoria Discreta.
- Media y Varianza de una Variable Aleatoria Discreta.

Variable Aleatoria.

6.1 Soporte de una variable aleatoria Discreta

Definición 6.1 Soporte de una variable aleatoria

El **soporte S** de una variable aleatoria es el conjunto de **valores reales** que ocurren con probabilidad distinta de cero.

El soporte de la variable X igual al número de monedas en las que sale “Cara” en la parte superior del lanzamiento de tres monedas seria $S = \{0,1,2,3\}$

Quintina,C.(2013); indica “Se llama **soporte** de una **variable aleatoria discreta** al conjunto de puntos que tienen probabilidad **distinta de 0** y a cada uno de esos puntos se les llama puntos de masa” (pág. 40)

Y Tablada,E. & Balzarini,M. (2014); señalan “Una **variable aleatoria es discreta** si su **soporte es discreto**, es decir, si consiste en un número **finito o numerable** de resultados: $S_X = \{x_1, x_2, \ldots x_n.\}$.” (pág. 49)

Una variable aleatoria es discreta si su soporte S es un conjunto contable

6.2 Variable aleatoria discreta

Definición 6.2 Variable aleatoria discreta

Sea ($\boldsymbol{\Omega}$, $\mathscr{D}$), el Espacio Muestral de un **experimento estadístico** y sea X una función cuyo dominio es $\boldsymbol{\Omega}$,y cuyo conjunto de llegada es R, donde R es el conjunto de **números reales**; bajo estas condiciones, la función X es

Wallpole,R. & Myers,S. (2013);indican "toman un **número finito o infinito** numerable de valores. Se corresponden con **experimentos** en los que se cuenta el número de veces que ha ocurrido un **suceso**." (pág. 60)

Vladimorvna,O. (2012) señala "Una **variable aleatoria se dirá discreta** si el conjunto de valores que toma es un conjunto numerable, es decir, que solo puede tomar unos valores concretos. Dicho conjunto lo denotaremos por: $\{x_1, x_2, x_3, \ldots., x_k\}$" (pág. 155)

En definitiva, sus representaciones como funciones: X: $\boldsymbol{\Omega} \rightarrow$ R; lo cual significa que a cada $\omega \in \boldsymbol{\Omega}$,la función X le asigna uno y solo un número real.

6.3 Distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta

Definición 6.3 Distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta

Con cada **variable aleatoria discreta** asociaremos una función f=P(X=x): R [0,1] a la que denominaremos Función de **distribución de Probabilidad** de X, función que debe cumplir las siguientes condiciones:

$$0 \leq P(X = x) \leq 1 \qquad \textbf{(19)}$$

$$\sum_{x \in S} P(X = x) = 1 \qquad (\mathbf{20})$$

Perez,T. & Ortiz,C. (2015) ;indican "Si x es una **variable aleatoria discreta**, la función dada por F(x) para cada x contenida en el **intervalo de x** se denomina función de probabilidad o distribución de función de probabilidad, o **distribución de probabilidad** , de x" (pág. 385)

Ramirez ,G & Inzunsa,S.(2013) ;afirman "la **distribución de probabilidad** de una variable aleatoria es una función que asigna a cada suceso definido sobre la variable aleatoria la probabilidad de que dicho **suceso** ocurra. La distribución de probabilidad está definida sobre el conjunto de todos los eventos rango de valores de la **variable aleatoria**. (pág. 50)

Para la variable X igual al número de monedas en las que sale "cara" en la parte superior del lanzamiento de tres monedas su distribución de probabilidad seria:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}; & x = 3 \\ \frac{3}{8}; & x = 1.2 \\ 0; & resto\ de\ x \end{cases}$$

Ejemplo N°1

Un artesano ha elaborado 7 colchas de una etnia indígena 2 de ellas tienen algún defecto. Un turista compra 3 de estas colchas. Sea el número de colchas defectuosas. Hallar la distribución de probabilidad de X:

$A1, A2, = \ Defectuosa$

$A3, A4, A5, A6, A7 = En\ buen\ estado$

$\boldsymbol{\Omega} = \{(\mathbf{A1}, \mathbf{A3}), (\mathbf{A1}, \mathbf{A4}), (\mathbf{A1}, \mathbf{A5}), (\mathbf{A1}, \mathbf{A6})(\mathbf{A1}, \mathbf{17}), (\mathbf{A2}, \mathbf{A3}), (\mathbf{A2}, \mathbf{A4}), (\mathbf{A2}, \mathbf{A5}), (\mathbf{A2}, \mathbf{A6})(\mathbf{A2}, \mathbf{17}\}$

$X = \ Numero\ de\ colchas\ defectuosas$

$$P(X = 0) = \frac{2}{7}$$

$$P(X = 1) = \frac{4}{7}$$

$$P(X = 2) = \frac{1}{7}$$

Ilustración 178

$$F(x) = \begin{cases} \frac{2}{7}; & x = 0 \\ \frac{4}{7}; & x = 1 \\ \frac{1}{7}; & x = 2 \end{cases}$$

Ejemplo N°2

En un cyber se tiene 5 artículos de los cuales 3 están 3 defectuosos y 2 están en buen estado se toma una muestra aleatoria sin reemplazo de 2 artículos. Encuentre la distribución de la variable aleatoria

A, B, C=Mal estado

D, E=Buen estado

$$\mathbf{\Omega} = \{(\mathbf{A},\mathbf{B}),(\mathbf{A},\mathbf{C}),(\mathbf{A},\mathbf{D}),(\mathbf{A},\mathbf{E})(\mathbf{B},\mathbf{C}),(\mathbf{B},\mathbf{D}),(\mathbf{B},\mathbf{E}),(\mathbf{C},\mathbf{D}),(\mathbf{D},\mathbf{E}\}$$

X= Numero de colchas defectuosas

$$P(X=0) = \frac{1}{10}$$

$$P(X=1) = \frac{6}{10}$$

$$P(X=2) = \frac{3}{10}$$

Ilustración 179

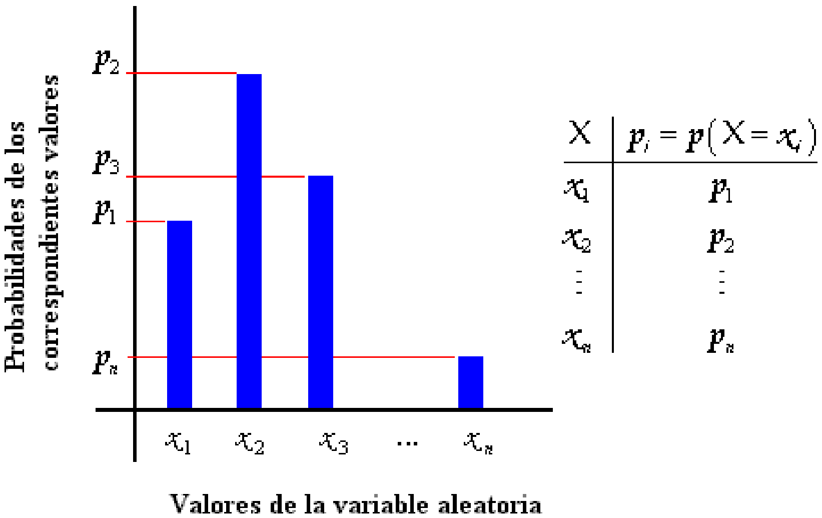
$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}; & x = 0 \\ \frac{6}{10}; & x = 1 \\ \frac{3}{10}; & x = 2 \end{cases}$$

6.4 Distribución de probabilidad acumulada de una variable aleatoria discreta

Definición 6.4 Distribución de probabilidad acumulada de una variable aleatoria discreta

Una función de **variable real** $F\colon R \longrightarrow [0,1]$ es definida como **Distribución Acumulada** de X, si y solo si: F$(x) = P(X \le x)$ para todo valor x real, este o no en el soporte S de X.

Quevedo,H. & Dominguez, A. (2013); indican "Una **distribución de probabilidad** de una **variable aleatoria** X es el conjunto de pares ordenados (X , f(X)) donde f(X) es la función de probabilidad de X (si X es discreta)" (pág. 210)



Martilotti,R. (2012); afirma “La **suma de las probabilidades** de cada valor de una **variable aleatoria discreta** es decir, una variable X es menor que o equivalente a x, para cada valor de x.” (pág. 190)

La distribución acumulada de X igual al número de monedas en las que sale “Cara” en la parte superior del lanzamiento de tres monedas.

$$F(x) = \begin{cases} 0; & si\ x < 0 \\ \frac{1}{8}; & si\ 0 \leq x \ \leq 1 \\ \frac{4}{8}; & si\ 1 \leq x \ \leq 2 \\ \frac{1}{8}; & si\ 2 \leq x \ \leq 3 \\ 1; & si\ x \geq 3 \end{cases}$$

Ejemplo N°1

Realizar la distribución acumulada del ejemplo n°1 de variable aleatoria discreta.

$$F(x) = \begin{cases} 0; & si\ x < 0 \\ \frac{2}{7}; & si\ 0 \leq x \ \leq 1 \\ \frac{4}{7}; & si\ 1 \leq x \ \leq 2 \\ \frac{1}{7}; & si\ 2 \leq x \ \leq 3 \\ 1; & si\ x \geq 3 \end{cases}$$

Ejemplo N°2

Realizar la distribución acumulada del ejemplo n°2 de variable aleatoria discreta.

$$F(x)=\begin{cases} 0; & si\ x<0 \\ \frac{1}{10}; & si\ 0\le x\ \le 1 \\ \frac{6}{10}; & si\ 1\le x\ \le 2 \\ \frac{3}{10}; & si\ 2\le x\ \le 3 \\ 1; & si\ x\ge 3 \end{cases}$$

6.5 Valor esperado de una variable aleatoria discreta

Definición 6.5 Valor esperado de una variable aleatoria discreta

Sea x una **variable aleatoria** con distribución de probabilidad P(X=x) y g(x) una función en términos de x. El **valor esperado** de g(x) si existe, define como:

$$E[g(x)]=\sum_{x\in S} g(x)P(X=x) \qquad (\mathbf{21})$$

Propiedades:

$$E[c]=c \qquad (\mathbf{22})$$

$$E[cg(x)]=cE[g(x)] \qquad (\mathbf{23})$$

$$E[cg_1(x)+g_2(x)]=E[g_1(x)]+E[g_2(x)] \quad (\mathbf{24})$$

Velasquez,L. (2013);indica "El **valor esperado** de una **variable discreta** es aquel valor medio teórico de todos los valores que puede tomar la variable. Representa una **medida de centralización**" (pág. 126)

Gonzales,M. & Perez,V. (2014); afirman "El valor que se espera obtener de un experimento probabilístico se llama el **valor esperado**. También llamado **"esperanza matemática"**. También lo llamamos **media**" (pág. 185)

Ejemplo N°1

Si una persona compra una rifa, en la que puede ganar de \$200 ó un segundo premio de \$50 con probabilidades de: 0.01 y 0.03. ¿Cuál sería el precio justo por pagar por la rifa?

$$E(x)\ =\ 200\ \cdot\ 0.01\ +\ 50\ \cdot\ 0.03\ =\$3.50$$

Ejemplo N°2

Un jugador lanza dos monedas. Gana $1 ó $2 si aparecen una o dos caras. Por otra parte, pierde $5.00 si no aparece cara. Determinar la esperanza matemática del juego y si éste es favorable.

$$E = \{(c,c);(c,x);(x,c);(x,x)\}$$

$$P(+1) = \frac{2}{4}$$

$$P(+2) = \frac{1}{4}$$

$$P(-5) = \frac{1}{4}$$

$$E(x) = 1 \cdot \frac{2}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} - 5 \cdot \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}\ Es\ desfavo$$

Ilustración 180

Ejemplo N°3

Se supone que X representa el número de materias que los estudiantes de primer semestre se inscriben en un semestre modalidad matutina y su función probabilidad está dada por:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{100}; & x = 2 \\ \frac{1}{100}; & x = 3 \\ \frac{3}{100}; & x = 4 \\ \frac{8}{100}; & x = 5 \\ \frac{85}{100}; & x = 6 \\ \frac{2}{100}; & x = 7 \end{cases}$$

Calcular el valor esperado de X:

$$E(x) = 2(0.01) + 3(0.01) + 4(0.03) + 5(0.08) + 6(0.85) + 7(0.02) = 5.81$$

6.6 Media y Varianza de una variable aleatoria discreta

Definición 6.6.1 Media de una variable aleatoria discreta

La **media** de una variable aleatoria X con **distribución** de probabilidad P(X=x) se define como:

$$\mu = E[X] \qquad \textbf{(25)}$$

Definición 6.6.2 Varianza de una variable aleatoria discreta

La **varianza** de una variable aleatoria X con **distribución** de probabilidad P(X=x) se define como:

$$\sigma^2 = E[(X-\mu)^2] = E[X^2] - \mu^2 \qquad \textbf{(26)}$$

Levin ,R. & Rubin,D. (2013);indican "Es la **media** o también empleada el termino **valor esperado** y se interpreta como un promedio entre los valores resultantes probabilísticos" (pág. 142)

Devore, J. (2014) ;afirma "La **varianza** de una variable aleatoria es una característica numérica que proporciona una idea de la **dispersión de la variable** aleatoria respecto de su esperanza. Decimos que es un parámetro de dispersión" (pág. 210)

Ejemplo N°1

En una bolsa se tiene 8 papeles:6 papeles de color rojo y 2 de color negro. EL juego consiste en sacar un papel, si el papel es rojo se pierde 0.25 ctv. y gana 0.50ctv si el papel es de color negro. Determine la media y la varianza

1-. Definir los eventos

$P: pierde\ el\ juego$

$G: gana\ el\ juego$

2.-Dato

$$P(p) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$P(G) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

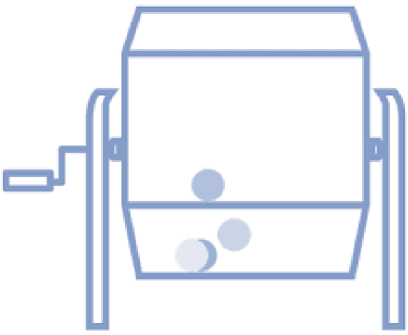


Ilustración 181

$$F(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}; & x = 0.25 \\ \frac{1}{4}; & x = 0.50 \end{cases}$$

Media

$$E(X) = (-0.25)\left(\frac{3}{4}\right) + (0.50)\left(\frac{1}{4}\right) = 0.31$$

$$\mu = E[X]$$

$$\mu = 0.31$$

Varianza

$$\sigma^2 = \left(0.25 - \frac{31}{100}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right) + \left(0.50 - \frac{31}{100}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right) = 0.011725$$

Ejemplo N°2

Realizar la media y varianza del ejercicio n°1 del ejercicio anterior

$$F(x) = \begin{cases} \frac{2}{7}; & x = 0 \\ \frac{4}{7}; & x = 1 \\ \frac{1}{7}; & x = 2 \end{cases}$$

Media

$$\mu = (0)\left(\frac{2}{7}\right) + (1)\left(\frac{4}{7}\right) + (2)\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{6}{7}$$

Varianza

$$\sigma^2 = \left(0 - \frac{6}{7}\right)^2 \left(\frac{2}{7}\right) + \left(1 - \frac{6}{7}\right)^2 \left(\frac{4}{7}\right) + \left(2 - \frac{6}{7}\right)^2 \left(\frac{1}{7}\right) = \frac{20}{49} = 0.40816$$

Ejemplo N°3

Realizar la media y varianza del ejercicio n°2 del ejercicio anterior

$$F(x) = \begin{cases} 0; & si\ x < 0 \\ \frac{2}{7}; & si\ 0 \leq x\ \leq 1 \\ \frac{4}{7}; & si\ 1 \leq x\ \leq 2 \\ \frac{1}{7}; & si\ 2 \leq x\ \leq 3 \\ 1; & si\ x \geq 3 \end{cases}$$

Media

$$\mu\ =\ (1)\left(\frac{2}{28}\right)\ +\ (2)\left(\frac{3}{28}\right)\ +\ (3)\left(\frac{4}{28}\right)\ +\ (4)\left(\frac{5}{48}\right)\ +\ (5)\left(\frac{4}{20}\right)\ +\ (6)\left(\frac{3}{20}\right) +\ (7)\left(\frac{2}{20}\right)\ +\ (8)\left(\frac{1}{20}\right)\ = \frac{129}{28} = 4.60$$

Varianza

$$\sigma^2 = \left(1 - \frac{129}{28}\right)^2\left(\frac{2}{28}\right) + \left(2 - \frac{129}{28}\right)^2\left(\frac{3}{28}\right) + \left(3 - \frac{129}{28}\right)^2\left(\frac{4}{28}\right) + \left(4\frac{129}{28}\right)^2\left(\frac{5}{28}\right) + \left(5 - \frac{129}{28}\right)^2\left(\frac{4}{20}\right) + \left(6 - \frac{129}{28}\right)^2\left(\frac{3}{20}\right) + \left(7 - \frac{129}{28}\right)^2\left(\frac{2}{20}\right) + \left(8 - \frac{129}{28}\right)^2\left(\frac{1}{20}\right) = \frac{57}{16}\ =\ 3.5625$$

6.7 Experimento Binomial

Si lanzamos una moneda puede tener dos posibles resultados: cara o sello. Su probabilidad es conocida y constante en cada lanzamiento y esto se puede repetir un sinnúmero de veces. Estos tipos de experimento siguen una distribución binomial. Un experimento binomial posee las siguientes características:

- Solo puede existir dos posibles resultados: éxito o fracaso.
- La probabilidad de un éxito ***p*** sigue siendo constante de un ensayo al siguiente al igual que lo hace la probabilidad del fracaso ***(1 – p).***
- La probabilidad de un éxito en un ensayo es totalmente independiente de cualquier otro ensayo.
- El experimento puede repetirse muchas veces.

6.8 Distribución Binomial

La variable aleatoria discreta X tiene distribución binomial si es igual al número de sucesos que ocurren en un experimento Binomial y su distribución de probabilidades está dada por:

$$\boldsymbol{P(X = x) = \binom{n}{x} p^x(1-p)^{n-x}, x \in S \quad siendo \quad S = \{0, 1, 2 \ldots, n\}}$$

Según **Webster, A (2001).** *"Cada ensayo en una distribución binomial termina en solo uno de dos resultados mutuamente excluyentes, uno de los cuales se identifica como un éxito y el otro como un fracaso. La probabilidad de cada resultado permanece constante de un ensayo al siguiente".*

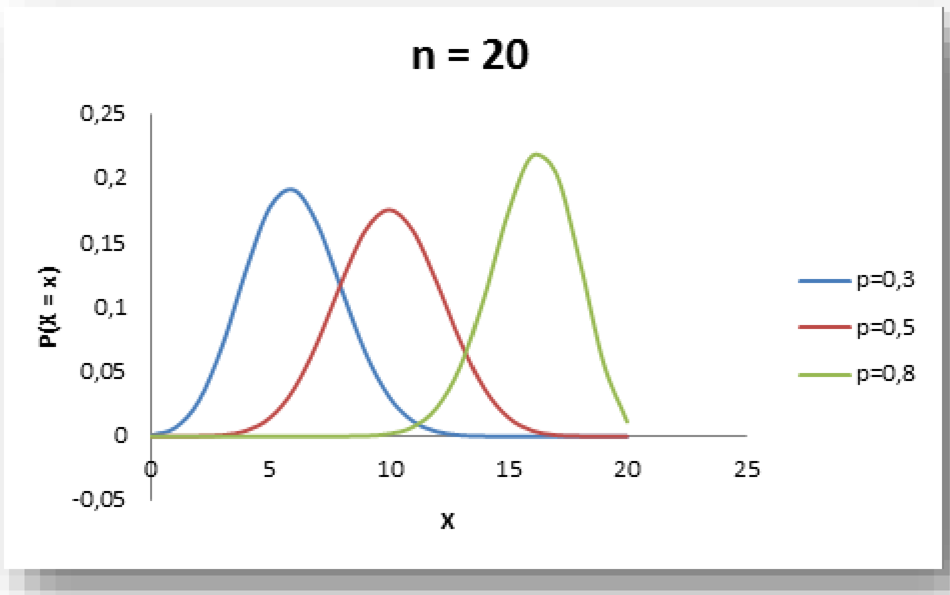
Media Y Varianza De La Distribución Binomial.

La media y la varianza está dada por:

Formula de la media $\boldsymbol{\mu = np}$

Formla de la varianza $\boldsymbol{\sigma = np(1-p)}$

GRÁFICO DE LA DISTRIBUCION BINOMIAL



Ejercicio: Se sabe que la probabilidad de que artículo producido en cierta fábrica no cumpla las especificaciones es 0,04. Se observan 15 artículos elegidos al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que tres de ellos no cumplan las especificaciones? ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos dos no cumplan las especificaciones?

Sol: Lo más importante es determinar mi **éxito** en cada ejercicio de esta índole si observamos el problema menciona que ***-artículo producido en cierta fábrica no cumpla las especificaciones es 0,04-*** el error evidente seria afirma que este es mi fracaso, pero en realidad es mi éxito porque es un porcentaje muy bajo de errores en producto.

¿Cuál es la probabilidad de que tres de ellos no cumplan las especificaciones?

p = 0.04
n = 15
x = 3

$$P(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$P(X=3) = \binom{15}{3} 0.04^3 (1-0.04)^{15-3}$$

$$P(X=3) = \frac{15!}{3!\,(15-3)!}\ x\ 0.0000640\ x\ 0.612$$

$$P(X=3) = 455x0{,}0000392$$

$$P(X=3) = 0.0178$$

Resp: la probabilidad de que tres de los 15 artículos no cumplan las especificaciones es del 1.78%

¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos dos no cumplan las especificaciones?

p = 0.04
n = 15
x ≥ 2

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2)$$

$$P(X \geq 2) = 1 - [P(X=0) + P(X=1)]$$

$$P(X \geq 2) = 1 - [0.5421 + 0.3388]$$

$$P(X \geq 2) = 1 - 0.8809$$

$$P(X \geq 2) = 0.1191$$

Resp: la probabilidad de que por lo menos dos no cumplan las especificaciones es del **11.91%**

Ejercicio: La variable aleatoria X tiene una distribución binomial con n=8, p=0,4.

a) **Define la función de distribución de probabilidad de x**
b) **Grafique la función de distribución de probabilidad**
c) **Calcule P(X=5)**
d) **Calcule P(X ≤ 2)**

Para el literal A:

$$P(X=x) = \binom{8}{x} (0{,}4)^x (0{,}6)^{8-x}$$

Para el literal B:

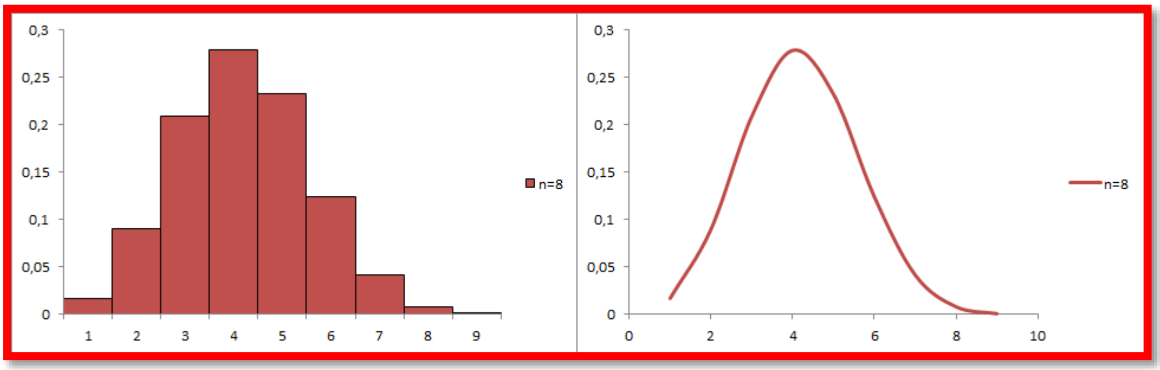


Ilustración 182

Para el literal C:

$$\boldsymbol{P(X=5)=\binom{8}{5}(0,4)^5(0,6)^3}$$

$$\boldsymbol{P(X=5)=(56)(0.01020)(0.216)=0.1233x100\%=12,33\%}$$

Para el literal D:

$$\boldsymbol{\mathrm{P}(\mathrm{X}\ \leq\ 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=3)}$$

$$\boldsymbol{\mathrm{P}(\mathrm{X}\ \leq\ 2)=\binom{8}{0}(0,4)^0(0,6)^8+\binom{8}{1}(0,4)^1(0,6)^7+\binom{8}{2}(0,4)^2(0,6)^6}$$

$$\boldsymbol{\mathrm{P}(\mathrm{X}\ \leq\ 2)=0,016+0,089+0,209=0,314\mathrm{x}100\%=31,4\%}$$

Ejercicios de Distribución Binomial

1.- La probabilidad de que cierto estudiante repruebe de 0 – 2 materias es de 0.45. Si estudia durante 3 años y luego se retira para regresar después de un tiempo. ¿Cuál es la probabilidad de que cuando regrese repruebe por lo menos una materia?

p=0,45
q=0,55
x=1
n=3

$$P(X=1)=1-\left[\binom{3}{1}0,45^1(1-0,45)^{3-1}\right]$$

$$P(X=1)=1-\left[\binom{3}{1}0,45^1(0,55)^2\right]$$

$$P(X=1)=1-\left[\left(\frac{3!}{(3-1)!1!}\right)0,45^1(0,45)^2\right]$$

$$P(X=1)=1-[0,41]$$

$$P(X=1)=0,59$$

Media:

$$\mu = np$$

$$\mu = 3 \times 0{,}45$$

$$\mu = 1{,}35$$

Varianza:

$$\sigma^2 = np(1-p)$$

$$\sigma^2 = 3 \times 0{,}45(0{,}55)$$

$$\sigma^2 = 0{,}74$$

Desviación Estándar

$$\sigma = \sqrt{np(1-p)}$$

$$\sigma = \sqrt{0{,}74}$$

$$\sigma = 0{,}86$$

2.- El gobierno ofrece becas a 5 estudiantes de 22 a 24 años de los cuales el 43% si trabajan.

a) hallar la probabilidad de que si todos los estudiantes trabajan 3 de ellos pierdan la beca.

p=0.43
q=0.57
x=3
n=5

$$P(X=3) = \binom{5}{3} 0{,}43^3 (1-0{,}43)^{5-3}$$

$$P(X=3) = \binom{5}{3} 0{,}43^3 (1-0{,}43)^2$$

$$P(X=3) = \left(\frac{5!}{(5-3)!3!}\right) 0{,}43^3 (1-0{,}43)^2$$

$$P(X=3) = 0{,}26$$

Media:

$$\mu = np$$

$$\mu = 5 \times 0{,}43$$

$$\mu = 2{,}15$$

Varianza:

$$\sigma^2 = np(1-p)$$

$$\sigma^2 = 5 \times 0{,}43(1-0{,}43)$$

$$\sigma^2 = 1{,}23$$

b) Cual es la probabilidad de que al menos 1 estudiantes pierda la beca.

p=0.43
q=0.57
x=1
n=5

$$P(X=1) = 1 - \left[\binom{5}{0} 0.43^1 (1-0.43)^{5-1}\right]$$

$$P(X=1) = 1 - \left[\binom{5}{0} 0.43^1 (1-0.43)^4\right]$$

$$P(X=1) = 1 - \left[\left(\frac{5!}{(5-0)!0!}\right) 0.43^1 (1-0.43)^4\right]$$

$$P(X=1) = 1 - [0.045]$$

$$P(X=1) = 0.95$$

Media:	**Varianza:**
$\mu = np$	$\sigma^2 = np(1-p)$
$\mu = 5\times 0{,}43$	$\sigma^2 = 5\times 0{,}43(1-0{,}43)$
$\mu = 2{,}15$	$\sigma^2 = 1{,}23$

3.-Una asociación estudiantil realizo una implementación de medios tecnológicos en una Universidad causa efectos de mejoramiento académico con una probabilidad de 0,66 para comprobar el rendimiento de los estudiantes dicha asociación escoge 6 estudiantes al azar para aplicarles un examen.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que ningún estudiante obtenga un buen examen?

p=0,66
q=0,34
x=0
n=6

$$P(X=0)=\binom{6}{0}0{,}66^0(1-0{,}66)^{6-0}$$

$$P(X=0)=\binom{6}{0}0{,}66^0(1-0{,}66)^{6}$$

$$P(X=0)=\left(\frac{6!}{(6-0)!0!}\right)0{,}66^0(0{,}34)^{6}$$

$$P(X=0)=0{,}0195$$

Media:	**Varianza:**	**Desviación estándar**
$\mu = np$	$\sigma^2 = np(1-p)$	$\sigma = \sqrt{np(1-p)}$
$\mu = 6\times 0{,}66$	$\sigma^2 = 6\times 0{,}66(0{,}34)$	$\sigma = \sqrt{1{,}346}$
$\mu = 3{,}96$	$\sigma^2 = 1{,}346$	$\sigma = 1{,}16$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 2 tengan un buen examen?

p=0,66
q=0,34
x=≥2
n=6

$$P(X=\geq 2)=1-\left\{\left[\binom{6}{0}0{,}66^0(1-0{,}66)^{6-0}\right]+\left[\binom{6}{1}0{,}66^1(1-0{,}66)^{6-1}\right]\right\}$$

$$P(X=\geq 2)=1-\left\{\left[\binom{6}{0}0{,}66^0(0{,}34)^{6}\right]+\left[\binom{6}{1}0{,}66^1(0{,}34)^{5}\right]\right\}$$

$$P(X=\geq 2)=1-\left\{\left[\left(\frac{6!}{(6-0)!0!}\right)0{,}66^0(0{,}34)^{6}\right]+\left[\left(\frac{6!}{(6-1)!1!}\right)0{,}66^1(0{,}34)^{5}\right]\right\}$$

$$P(X=\geq 2)=1-\{[0{,}0015]+[0{,}018]\}$$

$$P(X=\geq 2)=1-\{0{,}0195\}$$

$$P(X=\geq 2)=0{,}98$$

Media:	**Varianza:**	**Desviación estándar**
$\mu = np$	$\sigma^2 = np(1-p)$	$\sigma = \sqrt{np(1-p)}$

$\mu = 6 \times 0{,}66$ $\quad \sigma^2 = 6 \times 0{,}66(0{,}34)$ $\quad \sigma = \sqrt{1{,}346}$

$\mu = 3{,}96$ $\quad \sigma^2 = 1{,}346$ $\quad \sigma = 1{,}16$

4.-La probabilidad de que un estudiante de la Carrera de ingeniería en Sistemas Computacionales finalice la carrera en 5 o 6 años es de 0,28. De 9 estudiantes matriculados en 4to semestre ¿Cuál es la probabilidad de que 5 logren finalizar la carrera en 3 años?

p=0,28
q=0,72
x=5
n=9

$$P(X=5) = \binom{9}{5} 0{,}28^5 (1-0{,}28)^{9-5}$$

$$P(X=5) = \left(\frac{9!}{(9-5)!5!}\right) 0{,}28^5 (0{,}72)^4$$

$$P(X=5) = \binom{9}{5} 0{,}28^5 (0{,}72)^4$$

$$P(X=5) = 0{,}058$$

Media:	**Varianza:**	**Desviación estándar**
$\mu = np$	$\sigma^2 = np(1-p)$	$\sigma = \sqrt{np(1-p)}$
$\mu = 9 \times 0{,}28$	$\sigma^2 = 9 \times 0{,}28(0{,}72)$	$\sigma = \sqrt{1{,}81}$
$\mu = 2{,}52$	$\sigma^2 = 1{,}81$	$\sigma = 1{,}35$

5.- La probabilidad de que un alumno de primer curso repita de 2 – 4 materias es de 0.33. Se eligió 20 alumnos al azar para preguntarles si han perdido alguna materia ¿Cuál es la probabilidad que haya exactamente 4 alumnos repetidores?

p=0,33
q=0,67
x=4
n=20

$$P(X=4) = \binom{20}{4} 0{,}33^4 (1-0{,}33)^{20-4}$$

$$P(X=4) = \left(\frac{20!}{(20-4)!4!}\right) 0{,}33^4 (0{,}67)^{16}$$

$$P(X=4) = \binom{20}{4} 0{,}33^4 (0{,}67)^{16}$$

$$P(X=4) = 0{,}095$$

Media:	**Varianza:**	**Desviación estándar**
$\mu = np$	$\sigma^2 = np(1-p)$	$\sigma = \sqrt{np(1-p)}$
$\mu = 9 \times 0{,}28$	$\sigma^2 = 9 \times 0{,}28(0{,}72)$	$\sigma = \sqrt{1{,}81}$
$\mu = 2{,}52$	$\sigma^2 = 1{,}81$	$\sigma = 1{,}35$

Distribución Binomial Negativa

Se tiene una sucesión independiente de repeticiones, todas ellas con probabilidad de suceso p; si r es un número entero previamente definido, diremos que X es una Variable Aleatoria Binomial Negativa si y solo si X representa el número de repeticiones para que el r-ésimo suceso ocurra. Su distribución es:

$$P(X=x)=\binom{x-1}{r-1}p^r(1-p)^{x-r}\ ,\ x\in S$$

Siendo S= {r, r+1, r+2…}

- La media y la varianza están dadas por:

$$\mu=\frac{r}{p} \qquad \sigma^2=\frac{r(1-p)}{p^2}$$

Ejercicio: Suponiendo que la probabilidad de que una persona contraiga cierta enfermedad a la que está expuesta es 30%, calcule.

Sol: cada persona constituye un ensayo estos ensayos son independientes y la probabilidad de éxito es 0.3

r = 4
p = 0.3
x = 10

$$\boldsymbol{P(X=x)=\binom{x-1}{r-1}p^r(1-p)^{x-r}}$$

$$\boldsymbol{P(X=10)=\binom{10-1}{4-1}0.3^4(1-0.3)^{10-4}}$$

$$\boldsymbol{P(X=10)=84x0.0081x0.1176}$$

$$\boldsymbol{P(X=10)=0.08}$$

Resp: la probabilidad que la décima persona expuesta a la enfermedad sea la cuarta en contraerla es del **8%.**

Ejercicios de Distribución Binomial Negativo

1.-La decisión de los estudiantes en que se implemente el PHD en la carrera de Ingeniería en Sistemas Computacionales tiene una probabilidad de 0,57. Se hacen 3 pruebas de conocimiento a los estudiantes para saber si se encuentran aptos para dicha implementación ¿Cuál es la probabilidad de que 10 estudiantes obtengan el PHD según su resultado en dicha prueba?

p=0,57
q=0,43
x=10
r=3

$$P(X=10)=\binom{10-1}{3-1}0{,}57^3(1-0{,}57)^{10-3}$$

$$P(X=10)=\binom{9}{2}0{,}57^3(0{,}43)^7$$

$$P(X=10)=\left(\frac{9!}{(9-2)!2!}\right)0{,}57^3(0{,}43)^7$$

$$P(X=10)=0{,}018$$

Media:

$$\mu = \frac{r}{p}$$

$$\mu = \frac{3}{0{,}57}$$

$$\mu = 5{,}26$$

Varianza:

$$\sigma^2 = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

$$\sigma^2 = \frac{3(1-0{,}57)}{0{,}57^2}$$

$$\sigma^2 = 3{,}97$$

Desviación Estándar

$$\sigma = \sqrt{\frac{r(1-p)}{p^2}}$$

$$\sigma = \sqrt{3{,}97}$$

$$\sigma = 1{,}99$$

2.-Ciertos estudiantes de la Carrera de Ingeniería en Sistemas Computacionales acudieron a una entrevista a un centro educativo para trabajar como docentes con la probabilidad del 0,47 de ser contratados. A dichos estudiantes durante la entrevista se les elaboro 3 pruebas ¿Cuál es la probabilidad de que 3 hayan sido seleccionados?

p=0,47
q=0,53
x=7
r=4

$$P(X=7) = \binom{7-1}{4-1} 0{,}47^4 (1-0{,}47)^{7-4}$$

$$P(X=7) = \left(\frac{6!}{(6-3)!3!}\right) 0{,}47^4 (0{,}53)^3$$

$$P(X=7) = \binom{6}{3} 0{,}47^4 (0{,}53)^3$$

$$P(X=7) = 0{,}15$$

Media:

$$\mu = \frac{r}{p}$$

$$\mu = \frac{4}{0{,}47}$$

$$\mu = 8{,}51$$

Varianza:

$$\sigma^2 = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

$$\sigma^2 = \frac{4(1-0{,}47)}{0{,}47^2}$$

$$\sigma^2 = 9{,}6$$

Desviación Estándar

$$\sigma = \sqrt{\frac{r(1-p)}{p^2}}$$

$$\sigma = \sqrt{9{,}6}$$

$$\sigma = 3{,}1$$

3.-Los registros de una compañía de soporte técnico, indica que la probabilidad de que sus equipos sean mal reparados por un grupo de estudiantes es del 0,37. La compañía decide hacer una prueba para saber quién es más eficaz y ágil en la reparación ¿Cuál es la probabilidad de que el sexto estudiante sea el segundo en concluir la prueba?

p=0,37
q=0,63
x=6
r=2

$$P(X=6) = \binom{6-1}{2-1} 0{,}37^2 (1-0{,}37)^{6-2}$$

$$P(X=6) = \left(\frac{5!}{(5-1)!1!}\right) 0{,}37^2 (0{,}63)^4$$

$$P(X=6) = \binom{5}{1} 0{,}37^2 (0{,}63)^4$$

$$P(X=6) = 0{,}11$$

Media: **Varianza:** **Desviación Estándar**

$$\mu = \frac{r}{p} \qquad \sigma^2 = \frac{r(1-p)}{p^2} \qquad \sigma = \sqrt{\frac{r(1-p)}{p^2}}$$

$$\mu = \frac{2}{0{,}37} \qquad \sigma^2 = \frac{2(1-0{,}37)}{0{,}37^2} \qquad \sigma = \sqrt{9{,}20}$$

$$\mu = 5{,}41 \qquad \sigma^2 = 9{,}20 \qquad \sigma = 3{,}03$$

4.-En determinada situación de emergencia se necesitan realizar 5 programas que aporten a un hospital. Se solicitan voluntarios de la Carrera de Ingeniería en Sistemas Computacionales con probabilidad de que 0,56 de propuestas ¿Cuál es la probabilidad de cubrir la emergencia con el noveno estudiante?

p=0,56
q=0,44
x=9
r =5

$$P(X=9) = \binom{9-1}{5-1} 0{,}56^5 (1-0{,}56)^{9-5}$$

$$P(X=9) = \left(\frac{8!}{(8-4)!4!}\right) 0{,}56^2 (0{,}44)^4$$

$$P(X=9) = \binom{8}{4} 0{,}56^5 (0{,}44)^4$$

$$P(X=9) = 0{,}14$$

Media: **Varianza:** **Desviación Estándar**

$$\mu = \frac{r}{p} \qquad \sigma^2 = \frac{r(1-p)}{p^2} \qquad \sigma = \sqrt{\frac{r(1-p)}{p^2}}$$

$$\mu = \frac{5}{0{,}56} \qquad \sigma^2 = \frac{5(1-0{,}56)}{0{,}56^2} \qquad \sigma = \sqrt{7{,}02}$$

$$\mu = 8{,}93 \qquad \sigma^2 = 7{,}02 \qquad \sigma = 2{,}65$$

5.- El 0,35 de los estudiantes de la Carrera de Ingeniería en Sistemas Computacionales, están en desacuerdo con los medios tecnológicos que posee la facultad.
Realizaron 2 inspecciones en el establecimiento ¿Cuál es la probabilidad de que 4 laboratorios aprueben la inspección?

p=0,65
q=0,35
x=4
r=2

$$P(X=4) = \binom{4-1}{2-1} 0{,}65^2 (1-p)^{4-2}$$

$$P(X=4) = \left(\frac{3!}{(3-1)!1!}\right) 0{,}65^2 (0{,}35)^2$$

$$P(X=4) = \binom{3}{1} 0{,}65^2 (0{,}35)^2$$

$$P(X=4) = 1{,}55$$

Media: **Varianza:** **Desviación Estándar**

$\mu = \frac{r}{p}$ $\sigma^2 = \frac{r(1-p)}{p^2}$ $\sigma = \sqrt{\frac{r(1-p)}{p^2}}$

$\mu = \frac{2}{0,65}$ $\sigma^2 = \frac{2(1-0,65)}{0,65^2}$ $\sigma = \sqrt{1,66}$

$\mu = 3,08$ $\sigma^2 = 1,66$ $\sigma = 1,29$

Distribución Geométrica

- Si r=1 la distribución Binomial Negativa recibe el nombre de distribución Geométrica

Según la fórmula de la distribución binomial negativa:

$$\boldsymbol{P(X = x) = \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r}, x \in S \quad siendo \quad S = \{r, r+1, r+2 \ldots, \}}$$

r =1 queda:

$$\boldsymbol{P(X = x) = \binom{x-1}{1-1} p^1 (1-p)^{x-1}}$$

Finalmente Resultaría que:

$$P(X = x) = p(1-p)^{x-1} \text{ , } x \in S \qquad \textit{Siendo } S = \{1, 2, 3 \ldots\}$$

- La media y la varianza están dadas por:

$$\mu = \frac{1}{p} \qquad \sigma^2 = \frac{(1-p)}{p^2}$$

Ejercicios de Distribución Geométrica

1.- La probabilidad de que la Carrera de Ingeniería en Sistemas computacionales se complemente con otra carrera es de 0.38. Si un estudiante decide probar con otra carrera ¿Cuál es la probabilidad de que obtenga resultados positivos antes de llegar a 3er año?

p=0,38
q=0,62
x=<3
r=1

$$P(X = x) = \{[p(1-p)^{x-1}] + [p(1-p)^{x-1}]\}$$

$$P(X < 3) = \{[0,38(1-0,38)^{1-1}] + [0,38(1-0,38)^{2-1}]\}$$

$$P(X < 3) = \{[0,38(0,62)^0] + [0,38(0,62)^1]\}$$
$$P(X < 3) = \{[0,38] + [0,24]\}$$
$$P(X < 3) = 0,62$$

Media:

$$\mu = \frac{1}{p}$$
$$\mu = \frac{1}{0,38}$$
$$\mu = 2,63$$

Varianza:

$$\sigma^2 = \frac{(1-p)}{p^2}$$
$$\sigma^2 = \frac{(1-0,38)}{0,38^2}$$
$$\sigma^2 = 4,29$$

Desviación Estándar

$$\sigma = \sqrt{\frac{(1-p)}{p^2}}$$
$$\sigma = \sqrt{4,29}$$
$$\sigma = 2,07$$

2.- Se estima que el 0.06 de los mejores pasantes de una empresa prefieren de un sueldo de hasta $500 con la probabilidad del 0.5 de otorgárselos para lo cual se evalúa su desempeño laboral durante un periodo de 3 meses ¿Cuál es la probabilidad de que solo sea necesario llegar a los 2 meses para encontrar un pasante y aumentarle el sueldo?

p=0,06
q=0,94
x=2
r=1

$$P(X = 2) = 0,06(1-0,06)^{2-1}$$
$$P(X = 2) = 0,06(0,94)^1$$
$$P(X = 2) = 0,05$$

Media:

$$\mu = \frac{1}{p}$$
$$\mu = \frac{1}{0,06}$$
$$\mu = 16,67$$

Varianza:

$$\sigma^2 = \frac{(1-p)}{p^2}$$
$$\sigma^2 = \frac{(1-0,06)}{0,06^2}$$
$$\sigma^2 = 261,11$$

Desviación Estándar

$$\sigma = \sqrt{\frac{(1-p)}{p^2}}$$
$$\sigma = \sqrt{261,11}$$
$$\sigma = 16,16$$

3.- En un expo-feria Universitaria, se necesita seleccionar a un alumno para que represente a la universidad, se reúnen a un grupo de los mejores alumnos de 7mo y 8vo semestre con probabilidad de que 0,05 sean de 8vo semestre. Se selecciona al azar 3 alumnos de los cuales el disparejo sea el representante y si los 3 son del mismo semestre se repite nuevamente la selección ¿Cuál es la probabilidad de que se necesiten menos de 4 intentos para que sea un alumno de 7mo semestre?

p=0,95 **q=0,05** **x=<4** **r=1**

$$P(X < 4) = \left(0,95(1-0,95)^{1-1}\right) + \left(0,95(1-0,95)^{2-1}\right) + \left(0,95(1-0,95)^{3-1}\right)$$
$$P(X < 4) = \left(0,95(0,05)\right) + \left(0,95(0,05)^1\right) + \left(0,95(0,05)^2\right)$$

$$P(X<4)=(0{,}047)+(0{,}047)+(0{,}0024)$$
$$P(X<4)=0{,}096$$

Media:	**Varianza:**	**Desviación Estándar**
$\mu=\frac{1}{p}$	$\sigma^2=\frac{(1-p)}{p^2}$	$\sigma=\sqrt{\frac{(1-p)}{p^2}}$
$\mu=\frac{1}{0{,}95}$	$\sigma^2=\frac{(1-0{,}95)}{0{,}95^2}$	$\sigma=\sqrt{0{,}06}$
$\mu=1{,}05$	$\sigma^2=0{,}06$	$\sigma=0{,}24$

4.- De un grupo de estudiantes de programación el 0,28 tienen gran capacidad y lógica de programar. Si seleccionamos un software creado por cualquiera de ellos ¿Cuál es la probabilidad de que el tercer estudiante elegido muestre un programa eficiente?

p=0,72 **q=0,28** **x=3** **r=1**

$$P(X=3)=0{,}72(1-0{,}72)^{3-1}$$
$$P(X=3)=0{,}72(0{,}28)^2$$
$$P(X=3)=0{,}056$$

Media:	**Varianza:**	**Desviación Estándar**
$\mu=\frac{1}{p}$	$\sigma^2=\frac{(1-p)}{p^2}$	$\sigma=\sqrt{\frac{(1-p)}{p^2}}$
$\mu=\frac{1}{0{,}72}$	$\sigma^2=\frac{(1-0{,}72)}{0{,}72^2}$	$\sigma=\sqrt{0{,}54}$
$\mu=1{,}39$	$\sigma^2=0{,}54$	$\sigma=0{,}73$

Distribución Hipergeométrica

Se tiene una población objetivo constituida por N entes; entre estos N-entes hay entre ellos que tienen una característica de interés en la investigación. Se toma una muestra de tamaño n de la población. Bajo estas condiciones, X es una Variable Aleatoria Hipergeométrica si y solo si representa el número de elementos con la característica de interés en la muestra. Su distribución es:

- $P(X=x)=\frac{\binom{a}{x}\binom{N-a}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad x\in S$ Y S= {0,1, 2…, k} donde k=min {a, n}

La media y la varianza de la distribución Hipergeométrica está dada por:

Media:

$$\mu = \frac{an}{N}$$

Varianza:

$$\sigma^2 = \frac{an}{N}\left(\frac{N-a}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

GRÁFICO DE LA DISTRIBUCIÓN HIPERGEOMÉTRICA.

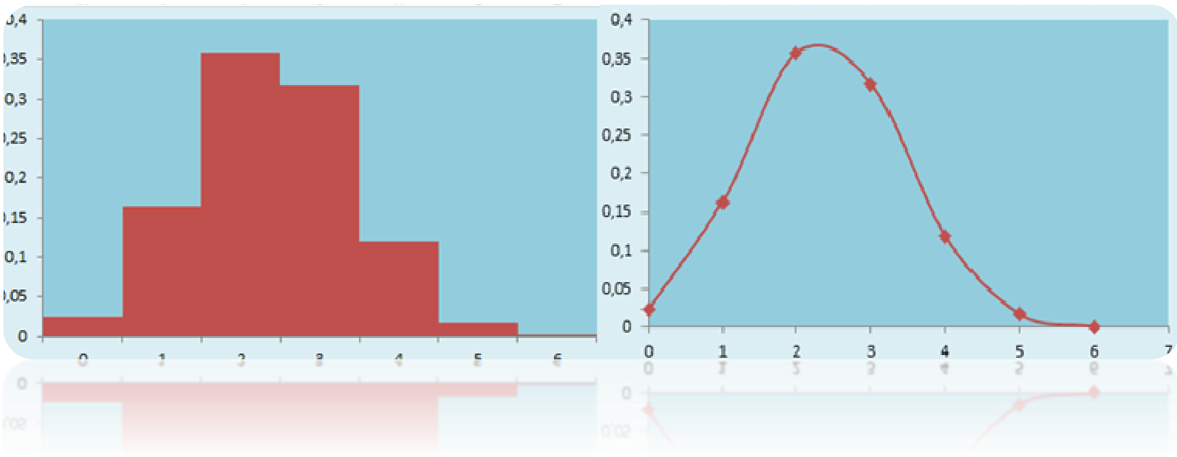


Ilustración 183

Ejercicio: Se tiene un lote de 25 microprocesadores, ocho de los cuales tienen algún tipo de disconformidad. Se toman aleatoriamente 10 de los 25 ítems, se desea calcular la probabilidad que:

a) Al menos dos microprocesadores tengan alguna disconformidad
b) No más de tres tengan disconformidad
c) Todos los microprocesadores inconformes estén en la muestra

Al menos dos microprocesadores tengan alguna disconformidad

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2)$$

$$P(X \geq 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)]$$

$$P(X \geq 2) = 1 - \left[\frac{\binom{8}{0}\binom{17}{10}}{\binom{25}{10}} + \frac{\binom{8}{1}\binom{17}{9}}{\binom{25}{10}}\right]$$

$$P(X \geq 2) = 1 - [0.00595 + 0.0595]$$

$$P(X \geq 2) = 0.9345$$

Resp: La probabilidad de que al menos dos microprocesadores tengan alguna disconformidad es del **93.45%.**

No más de tres tengan disconformidad

$$\boldsymbol{P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)}$$

$$\boldsymbol{P(X \leq 3) = \frac{\binom{8}{0}\binom{17}{10}}{\binom{25}{10}} + \frac{\binom{8}{1}\binom{17}{9}}{\binom{25}{10}} + \frac{\binom{8}{2}\binom{17}{8}}{\binom{25}{10}} + \frac{\binom{8}{3}\binom{17}{7}}{\binom{25}{10}}}$$

$$\boldsymbol{P(X \leq 3) = 0.00595 + 0.0595 + 0.2084 + 0.3332 = 0.6071}$$

$$\boldsymbol{P(X \leq 3) = 0.6071}$$

Resp: La probabilidad de que no más de tres tengan disconformidad es del **60.71%.**

Ejercicios de Distribución Hipergeométrica

1.-Una mesera se rehúsa a servir bebidas fuertes únicamente a estudiantes menores a 30 años, si verifica aleatoriamente solo 7 identificaciones de entre 12 estudiantes de los cuales 4 no tienen la edad suficiente ¿Cuál es la probabilidad que solo 3 sean menores a 30 años?

N=12
a=4
n=7
x=3

$$P(X = 3) = \frac{\binom{4}{3}\binom{12-4}{7-3}}{\binom{12}{7}}$$

$$P(X = 3) = \frac{\left(\frac{4!}{(4-3)!3!}\right)\left(\frac{8!}{(8-4)!4!}\right)}{\left(\frac{12!}{(12-7)!7!}\right)}$$

$$P(X = 3) = \frac{\binom{4}{3}\binom{8}{4}}{\binom{12}{7}}$$

$$P(X = 3) = \frac{(4)(70)}{(792)}$$

$$P(X = 3) = 0{,}353$$

Media: **Varianza:** **Desviación Estándar**

$$\mu = \frac{an}{N}$$

$$\sigma^2 = \frac{an}{N}\left(\frac{N-a}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{an}{N}\left(\frac{N-a}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}$$

$$\mu = \frac{4\times 7}{12}$$

$$\sigma^2 = \frac{4\times 7}{12}\left(\frac{12-4}{12}\right)\left(\frac{12-7}{12-1}\right)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{4\times 7}{12}\left(\frac{12-4}{12}\right)\left(\frac{12-7}{12-1}\right)}$$

$$\mu = 2{,}33$$

$$\sigma^2 = 0{,}69$$

$$\sigma = \sqrt{0{,}83}$$

2.- 15 personas alcanzan un título de docente universitario de los cuales solo 10 son excelentes. Elija usted al azar 8docentes. Hallar la probabilidad de que se escoja 6 de los 10 mejores.

N=15
a=10
n=8
x=6

$$P(X=6) = \frac{\binom{10}{6}\binom{15-10}{8-6}}{\binom{15}{8}}$$

$$P(X=6) = \frac{\left(\frac{10!}{(10-6)!6!}\right)\left(\frac{5!}{(5-2)!2!}\right)}{\left(\frac{15!}{(15-8)!8!}\right)}$$

$$P(X=6) = \frac{\binom{10}{6}\binom{5}{2}}{\binom{15}{8}}$$

$$P(X=6) = \frac{(210)(10)}{(6435)}$$

$$P(X=6) = 0{,}326$$

Media: **Varianza:** **Desviación Estándar**

$$\mu = \frac{an}{N}$$

$$\sigma^2 = \frac{an}{N}\left(\frac{N-a}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{an}{N}\left(\frac{N-a}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}$$

$$\mu = \frac{10\times 8}{15}$$

$$\sigma^2 = \frac{10\times 8}{15}\left(\frac{15-10}{15}\right)\left(\frac{15-8}{15-1}\right)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{10\times 8}{15}\left(\frac{15-10}{15}\right)\left(\frac{15-8}{15-1}\right)}$$

$$\mu = 5{,}33$$

$$\sigma^2 = 0{,}88$$

$$\sigma = 0{,}94$$

3.- En una empresa se hace un llamado a los trabajadores encargados del Soporte Técnico para ensamblar 27 nuevos equipos. Solo 7 de los equipos están mal ensamblados, viene el presidente

de la empresa y se lleva 11 y el vicepresidente se lleva el resto. ¿Cuál es la probabilidad de que solo uno de ellos se haya llevado todos los equipos con falla?

N=27
a=7
n=11
x=P(x=0)+P(x=6)

$$P(X=0)=\frac{\binom{7}{0}\binom{27-7}{11-0}}{\binom{27}{11}}$$

$$P(X=0)=\frac{\left(\frac{7!}{(7-0)!0!}\right)\left(\frac{20!}{(20-11)!11!}\right)}{\left(\frac{27!}{(27-11)!11!}\right)}$$

$$P(X=0)=\frac{167{,}960}{13037{,}895}$$

$$P(X=0)=0{,}0128$$

$$P(X=6)=\frac{\binom{7}{6}\binom{27-7}{11-6}}{\binom{27}{11}}$$

$$P(X=0)=\frac{\left(\frac{7!}{(7-6)!6!}\right)\left(\frac{20!}{(20-5)!5!}\right)}{\left(\frac{27!}{(27-11)!11!}\right)}$$

$$P(X=0)=\frac{108{,}528}{13037{,}895}$$

$$P(X=0)=0{,}0083$$

$$P(X=0)+P(X=6)=0{,}0128+0{,}0083$$

$$P(X=0)+P(X=6)=0{,}0211$$

Media:

$$\mu=\frac{an}{N}$$

$$\mu=\frac{7\times 11}{27}$$

$$\mu=2{,}85$$

Varianza:

$$\sigma^2=\frac{an}{N}\left(\frac{N-a}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

$$\sigma^2=\frac{7\times 11}{27}\left(\frac{27-7}{27}\right)\left(\frac{27-11}{27-1}\right)$$

$$\sigma^2=1{,}31$$

Desviación Estándar

$$\sigma=\sqrt{\frac{an}{N}\left(\frac{N-a}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{7\times 11}{27}\left(\frac{27-7}{27}\right)\left(\frac{27-11}{27-1}\right)}$$

$$\sigma=1{,}14$$

Distribución Poisson

Otro modelo probabilístico discreto es el de Poisson útil en fenómenos donde es necesario contar el número de ocurrencias en algún intercalo particular de tiempo; número de equipos que falla por semana, número de accidentes de tránsito por mes, etc. Según **Webster, A (2001).** *"la distribución de Poisson mide la probabilidad de un evento aleatorio sobre algún intervalo de tiempo o espacio".*

Una variable aleatoria discreta X tiene distribución Poisson con parámetro l cuando representan la cantidad de eventos que ocurren en una unidad de tiempo, espacio, volumen o alguna otra dimensión. Su distribución es:

- $P(X=x)=\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \quad x\in S$ siendo S= {0, 1, 2…,}

Son necesario dos supuestos para la aplicación de la distribución Poisson:

a) La probabilidad de ocurrencia del evento es constante para dos intervalos cualesquiera de tiempo o espacio.
b) La ocurrencia del evento en un intervalo es independiente de la ocurrencia de otro intervalo cualquiera.

La media y la varianza son:

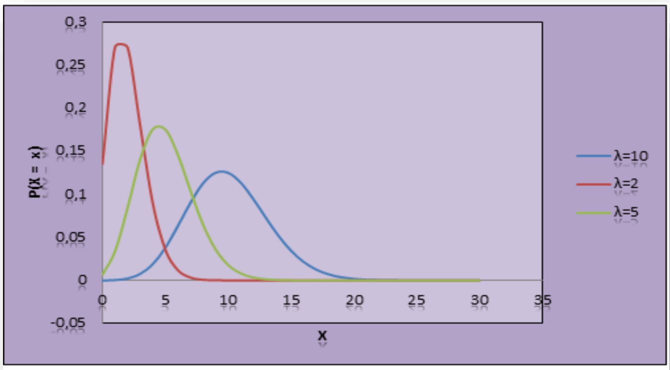
Media:

$$\mu = \lambda$$

Varianza:

$$\sigma^2 = \lambda$$

GRÁFICA DE LA DISTRIBUCIÓN DE POISSON.



Ejercicio: La cantidad de errores de transmisión de datos en una hora es 5 en promedio. Suponiendo que es una variable con distribución de Poisson, determine la probabilidad que:

a) En cualquier hora ocurra solamente 1 error.
b) En cualquier hora ocurran al menos 3 errores
c) En dos horas cualesquiera ocurran no más de 2 errores

Sea x: Variable aleatoria discreta (cantidad de errores por hora).
$\lambda = 5$ (promedio de errores de transmisión en 1 hora)

En cualquier hora ocurra solamente 1 error.

$$P(X = 1) = \frac{e^{-5}5^1}{1!} = \frac{0,006737x5}{1} = 0,03368$$

Resp: La probabilidad que en cualquier hora ocurra solamente un error es del **3.368%**

En cualquier hora ocurran al menos 3 errores

$$\boldsymbol{P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3)}$$

$$\boldsymbol{P(X \geq 3) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)]}$$

$$\boldsymbol{P(X \geq 3) = 1 - \left[\frac{e^{-5}5^0}{0!} + \frac{e^{-5}5^1}{1!} + \frac{e^{-5}5^2}{2!}\right]}$$

$$\boldsymbol{P(X \geq 3) = 1 - [0.0067 + 0.0337 + 0.0842]}$$

$$\boldsymbol{P(X \geq 3) = 0.8743}$$

Resp: La probabilidad de que en cualquier hora ocurran al menos 3 errores es del **87.43%**

En dos horas cualesquiera ocurran no más de 2 errores

Solución: λ = 5 en una hora, como el problema indica en dos horas se multiplica la constante lambda por 2 λ = 10

$$\boldsymbol{P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)}$$

$$\boldsymbol{P(X \leq 2) = \frac{e^{-10}10^0}{0!} + \frac{e^{-10}10^1}{1!} + \frac{e^{-10}10^2}{2!}}$$

$$\boldsymbol{P(X \leq 2) = 0.0028}$$

Resp: La probabilidad que en dos horas cualquiera ocurran no más de 2errores es de **0.28%.**

Ejercicio: Una interseccion de dos avenidas de mucho trafico, es el escenario de muchos accidentes. Un experto ha estudiado los datos sobre accidentes en este cruce, y ha concluido que “los accidentes ocurren con una tasa promedio de dos por mes”.

a) Estudiemos la conclusion del analista.
b) Encontremos la distribucion de probabilidad de la variable aleatoria X: “numero de accidentes por mes en esta interseccion”.
c) Determinemos la probabilidad de que hayan : 0 accidentes, 1 accidentes, 2 accidentes, 3 accidentes, por mes en dicha intersección.
d) ¿Cuál es el valor esperado de la variable aleatoria X?

a.

La conclusión del analista de tráfico no significa que existan exactamente 2 accidentes de tránsito por mes; en algún mes dado podría presentarse cualquier número de accidentes: 0, 1, 2, 3, 4, …

b.

La variable aleatoria X se distribuye según el modelo de Poisson, con parámetro

λ = 2 por tanto:

$$P(X=x)=\frac{e^{-2}2^{x}}{x!}$$

c.

La probabilidad de que haya 0 accidentes es:

$$P(X=0)=\frac{e^{-2}2^{0}}{0!}=0.135335$$

Resp: hay una probabilidad aproximadamente de 13.53% que no ocurran accidentes en un mes cualesquiera.

La probabilidad de que haya 1 accidente es:

$$P(X=1)=\frac{e^{-2}2^{1}}{1!}\cong 0.2707$$

Resp: hay una probabilidad aproximadamente de 27.07% que ocurra 1 accidente en un mes cualesquiera.

La probabilidad de que haya 2 accidentes es:

$$P(X=2)=\frac{e^{-2}2^{2}}{2!}=0.2707$$

Resp: hay una probabilidad aproximadamente del 27.07% que ocurra 2 accidentes en un mes cualesquiera.

La probabilidad de que haya 3 accidentes es:

$$P(X=3)=\frac{e^{-2}2^{3}}{3!}=0.18044$$

Resp: hay una probabilidad aproximadamente de 18.04% que ocurra 3 accidentes en un mes cualesquiera.

d. La media

$$\mu=E[X]=\lambda=2$$

Ejercicios de Distribución Poisson

1.-El número de ejercicios dado por un alumno Universitario que trabaja como docente es de 8 ejercicios por hora ¿Cuál es la probabilidad de que se resuelva 5 ejercicios por hora?

λ =8
X=5

$$P(X=5)=\frac{e^{-8}8^{5}}{5!}$$

$$P(X=5)=\frac{10,99}{120}$$

$$P(X=5)=0,092$$

Media:	**Varianza:**	**Desviación Estándar**
$\mu=\lambda$	$\sigma^{2}=\lambda$	$\sigma=\sqrt{\lambda}$
$\mu=8$	$\sigma^{2}=8$	$\sigma=\sqrt{8}$

$$\sigma = 2{,}83$$

2.-La probabilidad de que una carrera de Ingeniería en Sistemas complemente con otra es de 0,06. Si una persona estudio 70materias entre las 2 materias escogidas ¿Cuál es la probabilidad de que falle en una de las dos?

λ=n*p=70*0,06=4
x=1

$$P(X = 1) = \frac{e^{-4}4^{1}}{1!}$$

$$P(X = 1) = 0{,}0732$$

Media:

$$\mu = \lambda$$

Varianza:

$$\sigma^2 = \lambda$$

$$\sigma^2 = 4$$

Desviación Estándar

$$\sigma = \sqrt{\lambda}$$

$$\sigma = \sqrt{4}$$

$$\sigma = 2$$

3.- Si un alumno reprueba 3 materias por año ¿Cuál es la probabilidad de que registre 5 materias reprobadas en 3 años consecutivos?

λ=3*3=9
X=5

$$P(X = 5) = \frac{e^{-9}9^{5}}{5!}$$

$$P(X = 5) = \frac{7{,}29}{120}$$

$$P(X = 5) = 0{,}061$$

Media:

$$\mu = \lambda$$

$$\mu = 9$$

Varianza:

$$\sigma^2 = \lambda$$

$$\sigma^2 = 9$$

Desviación Estándar

$$\sigma = \sqrt{\lambda}$$

$$\sigma = \sqrt{9}$$

$$\sigma = 3$$

4.- en un laboratorio se decide hacer una revisión al sistema Operativo a todas las máquinas para saber cuáles están funcionando correctamente, ya que la decisión de renovar los laboratorios es por mayoría. Se identifica 0,4 posibles archivos dañados por minutos. ¿Cuál es la probabilidad de identificar 6 archivos en mal estado en 5 minutos?

λ =0,4*5=2
x=6

$$P(X = 6) = \frac{e^{-2}2^{6}}{6!}$$

$$P(X = 6) = 0{,}0120$$

Media:

$$\mu = \lambda$$

$$\mu = 2$$

Varianza:

$$\sigma^2 = \lambda$$

$$\sigma^2 = 2$$

Desviación Estándar

$$\sigma = \sqrt{\lambda}$$

$$\sigma = 2$$

$$\sigma = 1{,}41$$

Ejercicios Propuestos

Ejercicio 1: Un experimento consiste en lanzar tres veces una moneda. Sea la variable aleatoria: X ="número de caras que se obtienen". Se pide:

a) Distribución de probabilidad de X
b) Función de distribución de X. Representación gráfica
c) Media, varianza

Ejercicio 2: Al lanzar cuatro monedas se considera el número de escudos obtenidos. De la variable aleatoria X así obtenida, se pide:

a) Representación gráfica
b) Función de distribución. Representación gráfica
c) Esperanza matemática y varianza

Ejercicio 3: Calcular la media y varianza de la variable aleatoria que tiene como función de distribución:

$$F(x) = \begin{cases} 0; & si\ x < 2 \\ 0.2; & si\ 2 \leq x \ \leq 4 \\ 0.55; & si\ 4 \leq x \ \leq 6 \\ 0.85; & si\ 6 \leq x \ \leq 8 \\ 1; & si\ x \geq 8 \end{cases}$$

Ejercicio 4: En un cine de verano hay instaladas 800 sillas, sabiendo que el número de asistentes es una variable aleatoria de media 600 ¿Qué probabilidad existe de que el número de personas que vaya al cine un día cualquiera sea superior al número de sillas instaladas?

Ejercicio 5: Se desea conocer el número de automóviles que se deben poner a la venta durante un periodo determinado para que se satisfaga una demanda media de 300 unidades con una desviación típica de 100 unidades, con una probabilidad no inferior al75%

Bibliografia

Devore, J. (2014). *Probabilidad y Estadistica para ingenieras y ciencias.* Mexico: EDitec.

Gonzalez, M., & Perez, V. (2014). *Estadistica Aplicada Una vision Instrumental.* Madrid: Diaz de Santos.

Levin, R., & Rubin, D. (2013). *Estadistica para Administracion y economia.* Mexico: Pearson.

Martilotti, R. (2012). *Entiendiendo las probabilidades y calculandolas.* Barcelona: Infarom.

Perez, T., & Ortiz, c. (2015). *Prueba de Acceso a la Universidad Para mayores de 25 años Estadistica.* Sevilla: Editorial MAD.SL.

Quevedo, H., & Dominguez, A. (2013). *Aplicaciones de Probabilidad y Estadística a Problemas de Hidrología.* Barcelona: Editorial Españolas.

Quintina, C. (2013). *Elementos de Inferencia Estadistica.* San Jose: DIEDIN Editorial.

Ramirez, G., & Inzunsa, S. (2013). *Probabilidad y Estadistica II.* Mexico: Editorial Patria.

Tablada, E., & Balzarini, M. (2014). *Estadistica para la ciencias Agropecuarias.* Mexico: Editorial Brujas.

Velasquez, L. (2013). Estadistica Descriptiva y Probabilidad con excel . *Estadistica*, 110-190.

Vladimorvna, O. (2012). *Fundamentos de Probabilidad y estadistica.* Mexico D.F: Editorial Patria.

Wallpole, R., & Myers, S. (2013). *Probabilidad y Estadistica para ingenieros* . Mexico: Editorial Patria.

CAPÍTULO 7

VARIABLE ALEATORIA CONTINUAS

Introducción

En el estudio de la estadística se nos ha facilitado varias herramientas que nos ayudan a realizar una demostración gráfica y numérica de los datos obtenidos sobre una característica o variable de interés,X, de una población. Estos conceptos son muy importantes, pero el objetivo de la Estadística habitualmente va más allá: logramos tener nuestras conclusiones sobre la población a partir de los datos obtenidos en la muestra. Debemos de tener en consideración que será necesario modelizar las variables de interés, X, como variables aleatorias. En este capítulo, le daremos a conocer pequeños conceptos de variable aleatoria continua, y los modelos de probabilidad más utilizados.

Blaise Pascal
(Francia, 1623–1662)

Pierre de Fermat
(Francia, 1601–1665)

Contenido

- ❖ Variables aleatorias.
- ❖ Variables aleatorias continuas.
- ❖ Función de densidad de una variable aleatoria continua.
- ❖ Función de distribución de una variable aleatoria continua.
- ❖ Media y varianza de una variable aleatoria continua.
- ❖ Valor esperado de una variable aleatoria continua.

6. Variables aleatorias.

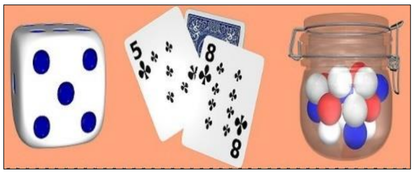


Ilustración 184:Representación de variables aleatorias.

Definición

- Es aleatoria cuando tomamos números con determinadas probabilidades. Dado un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathrm{A}, \mathrm{Pr})$, una variable aleatoria es cualquier función ,X.
  $X\colon \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ $\qquad \omega \rightarrow X(\omega)$

“Se llama variable aleatoria a toda función que asocia a cada elemento del espacio muestral un número real. $X\colon E \rightarrow R$.” (Rubin., 2011)

“Toda distribución de probabilidad es generada por una variable (porque puede tomar diferentes valores) aleatoria X (porque el valor tomado es totalmente al azar), y puede ser de dos tipos: Variable aleatoria discreta y variable aleatoria continua.” (Spiegel, 2010)

7.1 Variables aleatorias continuas.

Definición

- La variable aleatoria X será continua son los valores posibles que se encuentra dentro de los intervalos establecidos, estos pueden tomar cualquier número $\mathbb{R}$, y éstos pueden ser entre 0 y más infinito. $X\colon \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

Ilustración 185:Representación de variable aleatoria continua.

“Se dice que una variable aleatoria X es continua si su conjunto de posibles valores es todo un intervalo (finito o infinito) de números reales.” (Walpole, Myers, & Myers, 2012)

“Una variable aleatoria, X, decimos que es de tipo continuo cuando puede tomar cualquier valor en un intervalo de la recta real con una función de densidad $f(x)$ que representa la idealización en la población del perfil obtenido a partir de los datos en el diagrama de tallos y hojas o en el histograma.” (Ontalba, 2011)

7.1.1 Ejemplos.

Sea ***X*** la variable aleatoria continua, se presenta los siguientes ejemplos:

➢ Ejemplo 1.

$$X: Tiempo\ que\ tarda\ en\ fundirse\ una\ bombilla$$

➢ Ejemplo 2.

$$X: Cantidad\ de\ agua\ consumida\ en\ un\ mes$$

➢ Ejemplo 3.

$$X: Temperatura\ máxima\ en\ el\ mes\ de\ Junio$$

7.2 Función de densidad de una variable aleatoria continua.

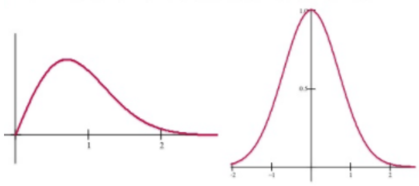


Ilustración 186: Representa la función de densidad de una variable aleatoria continua.

Definición

- Podemos definir a la función de densidad de X es una $f(x)$, de tal manera que para dos valores cualquiera $m\ y\ n$ con $m \leq n$. $P(m \leq X \leq n) = \int_m^n f(x)dx$.
- Sea la función de desidad: $f(x) = P(X = x)$

Las propiedades básicas de cualquier función de densidad son las siguientes:

1. $f(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$ (las frecuencias relativas tampoco podrían ser negativas).

2. $R < f(x)dx = 1$ (las frecuencias relativas también sumaban uno).

3. $P(X \in I) = \int_I f(x)dx$ (La función de densidad sirve para calcular la probabilidad de que la variable aleatoria X tome valores en un intervalo I que nos interese).

"La función $f(x)$ es una función de densidad de probabilidad para la variable aleatoria continua X, definida sobre el conjunto de los números reales." (Canavos, 2010)

"Dada una variable continua X decimos que $f(x)$ es una función de densidad, si la probabilidad de que X tome valores en el intervalo (a, b) es igual al área encerrada por la gráfica de $f(x)$, el eje x y las rectas $x = a, x = b$." (Spiegel, 2010)

7.2.1 Ejemplos.

➢ Ejemplo 1.

Se desea estudiar el nivel de gripe en ciertos profesionales de la empresa “Astinave”. La función de densidad de la variable aleatoria asociada es:

$$f(x) = \begin{cases} kx\,; & 0 \le x \le 2 \\ 0\,; & x < 0, x > 2 \end{cases}$$

Calcular el valor de k

Ilustración 187: Empleados - Ejemplo 1

Solución:
Para que f sea una función de densidad se debe verificar que:

$$f(x) \geq 0\,; \quad \forall x$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = 1$$

Como $f(x) \geq 0 \Rightarrow k \geq 0$

$$1 = \int_0^2 kxdx = k\left[\frac{x^2}{2}\right]^2 = k\frac{4}{2} = 2k = 1$$

$$\Rightarrow k = 1/2$$

- Ejemplo 2.
  En la empresa Mabe el tiempo de activación de los acondicionadores de aire fabricados es una variable aleatoria con función de densidad:

$$f(x) = F'(x)$$

$$= \frac{dF(x)}{dx}\begin{cases} 2x\,; & 0 < x < 0.5 \\ \frac{2}{3}(2-x): & 0.5 < x < k \\ 0, & en\ otro\ caso \end{cases}$$

El sensor de activación de un acondicionador de aire debe ser rápido, es inferior a 0.2 segundos y lento si su tiempo de activación es superior a 1 segundo. Calcular lo siguiente:

a) Calcular el valor de k para que $f(x)$ sea función de densidad, mientras se cumpla lo siguiente: $\int_{Rec\ x} f(x)dx = 1$.

Nos basamos en aplicando la siguiente propiedad

$$\int_0^{0.5} 2x\,dx + \int_{0.5}^{k} \left(\frac{2}{3}(2-x)\right)\,dx = 1 \rightarrow\ (0.5)^2 + \frac{2}{3}\left[\left(2k - \frac{k^2}{2}\right) - \frac{7}{8}\right] = 1$$

$$k^2 - 4k + 4 = 0 \rightarrow\ \ k = 2\,seg$$

El valor que debe tomar son dos segundos, para que sea una función de densidad.

- Ejemplo 3.
  Calcular la función de densidad en el siguiente caso:

$$f(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{4}\right)$$

$$= \frac{2x}{4} = \frac{x}{2}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}\ para\ 0 < x < 2 \\ \quad 0\ \ si\ no \end{cases}$$

7.3 Función de distribución de una variable aleatoria continua.

Valor de X	Probabilidad
0	1/8
1	3/8
2	3/8
3	1/8
TOTAL	1

Ilustración 188: Representa la función de distribución de una variable aleatoria continua.

Definición

- Tenemos $f(x)$ como la función de densidad de una variable aleatoria continua X, y $F(x)$ se denomina una función de distribución de la variable aleatoria X.
- $F(t) = \int_{-\propto}^{t} f(x)dx \quad \forall t\ \in \mathbb{R}$

La función de distribución de una variable continua siempre verifica las siguientes propiedades:

a) $F(x) \geq 0$;

b) b) $\int_{-\propto}^{\propto} f(x)dx = 1$

c) $P(a \leq x \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a)$

d) $f(x) = F'(x) \Rightarrow$ La función de densidad es la derivada de la función de distribución

(Martín Pliego, 2014). Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad $f(x)$, se define la función de distribución, $F(x)$, como:

$$F(x) = P[x \leq X] = \int_{-\propto}^{\propto} f(x)dx$$

(Rubin., 2011). "Dada una variable aleatoria continua X, con función de densidad $f(x)$, la función de distribución $F(x)$ es la función que para cada valor de la variable nos da la probabilidad de X tome ese valor, o cualquier otro inferior."

7.3.1 Función de distribución acumulada de una variable continua.

Definición

- Se define como la probabilidad de que para una variable aleatoria X continua, la función acumulada de distribución es: $F_x(x) = P(X \leq$

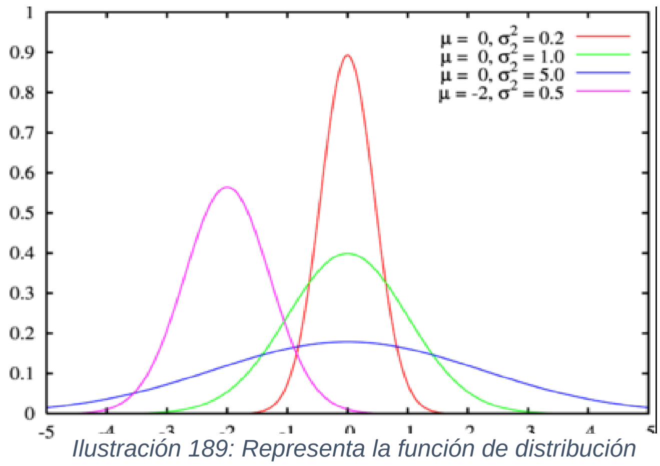


Ilustración 189: Representa la función de distribución acumulada de una variable aleatoria continua.

(aires, 2013). "La función de distribución acumulada de una variable aleatoria continua X con función de densidad $f(x)$ se define para todo $X \in \mathbb{R}$. Como $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\propto}^{x} f(t)dt$."

(Walpole, Myers, & Myers, 2012). "Se define la función de distribución acumulada para la variable aleatoria continua X como: $F(x) = \int_{-\propto}^{x} f(t)dt \ \forall x \in \mathbb{R}$."

7.3.2 Ejemplos.

- Ejemplo 1.
  Basándonos en el ejemplo 3 del tema (Función de densidad de una variable aleatoria continua), vamos a calcular lo siguiente:

Obtener la función de distribución

$$F(x) = P[X \leq x] = \int_{-\propto}^{x} f(x)dx$$

a)

$$si\ x < 0 \ \rightarrow \ F(x) = \int_{-\propto}^{x} 0\ dt = 0$$

$$si\ 0 \leq x < 0.5 \rightarrow \ F(x) = \int_{-\propto}^{x} 0\ dt + \int_{0}^{x} 2t\ dt = x^2$$

$$si\ 0.5 \leq x < 2 \rightarrow \ F(x) = \int_{-\propto}^{x} 0\ dt + \int_{0}^{0.5} 2t\ dt \ + \int_{0.5}^{x} \frac{2}{3}(2-t)dt = \frac{16x - 4x^2 - 4}{12}$$

$$si\ x \leq 2 \rightarrow \ F(x) = \int_{-\propto}^{x} 0\ dt + \int_{0}^{0.5} 2t\ dt \ + \int_{0.5}^{2} \frac{2}{3}(2-t)dt + \ \int_{2}^{x} 0\ dt = 1$$

Y esta se expresa de la siguiente manera:

$$F(x) = \begin{cases} 0\ ; & x\ < 0 \\ x^2; & 0 \leq x < 0.5 \\ \dfrac{16x - 4x^2 - 4}{12}; & 0.5 \leq x < 2 \\ 1; & x \geq 2 \end{cases}$$

- Ejemplo 2.
  En la ciudad de Guayaquil tenemos la variable aleatoria que representa a la proporción de los accidentes de peatones fatales que ocurren en horas pico, tiene la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} 42x(1-x)^5 \ ; & 0 < x \leq 1 \\ 0; \ para\ cualquier\ otro\ valor & \end{cases}$$

Ilustración 190: Peatón - Ejemplo 2

¿Cuál es la probabilidad de que no más del 25% de los accidentes de peatones sean fatales? Es decir, ¿Cuál es $P(X \leq 0.25)$?

$$= 42\int_0^1 x(1-x)^5\, dx = 42(\frac{x^2}{2} - \frac{5x^3}{3} + \frac{10x^4}{4} - \frac{10x^5}{5} + \frac{5x^6}{6} - \frac{x^7}{7})\Big|\begin{matrix}1\\0\end{matrix} = 1$$

Finalmente, la función de distribución acumulativa es:

$$= 42\int_0^x t(1-t)^5\, dt = 21x^2 - 70x^3 + 105x^4 - 84x^5 + 35x^6 - 6x^7$$

Por lo tanto, la probabilidad, de que la proporción de accidentes peatonales fatales sea menor del 25% es:

$$F(1/4) = 21(1/4)^2 - 70(1/4)^3 + 105(1/4)^4 - 84(1/4)^5 + 35(1/4)^6 - 6(1/4)^7$$

=0.5551

- Ejemplo 3.
  Suponga que el tiempo máximo que se debe reservar una habitación grande de cierto hotel son 4 horas. Con mucha frecuencia tienen reservaciones extensas y breves. De hecho, se puede suponer que la duración X de una conferencia tiene una distribución uniforme en el intervalo [0,4].

a) ¿Cuál es la función de densidad de probabilidad?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que cualquier reservación determinada dure al menos 3 horas?

Solución:

a) Literal a.

La función de densidad apropiada para la variable aleatoria x distribuida uniformemente en esta situación es:

$$P_x(X) = \begin{cases} \frac{1}{4}\ ; & 0 \le X \le 4 \\ 0\ ; & en\ otro\ caso \end{cases}$$

b) Literal b.

$$P[x \le 3] = \int_3^4 \frac{1}{4} dx = \frac{1}{4}$$

7.4 Valor esperado de una variable aleatoria continua.

Definición.

- Representa la cantidad media que se "espera", como resultado de un experimento aleatorio, cuando la probabilidad de cada suceso se mantiene constante y el experimento se repite un elevado número de veces.
- $\mu = E(X) = \int_{-\propto}^{\propto} x.f(x)dx$

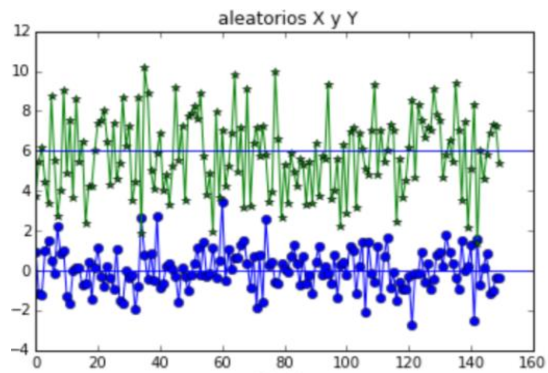


Ilustración 191: Representación del valor esperado de una variable aleatoria continua.

(Canavos, 2010). "Suponga que X es una variable aleatoria continua con función de densidad de probabilidad $f(x)$."

(Rubin., 2011). "Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad f(x), *s* define la esperanza matemática de esta variable aleatoria como: $E(X) = \int_{-\propto}^{\propto} x.f(x)dx = \mu$ "

7.4.1 Ejemplos.

- Ejemplo 1.
  Para la medición de la corriente que utiliza una máquina de coser industrial la media de X será:

$$E(X) = \int_0^{20} x.f(x)dx = 0.05\ /2| \begin{matrix} 20 \\ 0 \end{matrix} = 10$$

El promedio de la corriente que utiliza una máquina de coser industrial es de $10\, m.a.$ (miliamperios).

- Ejemplo 2.
  La empresa INATRA S.A. es fabricante de transformadores, se ha encontrado que la vida útil de un transformador, en años, se puede dar la siguiente función de densidad.

$$f(x) = F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} \begin{Bmatrix} \frac{3+x}{8} & ; \quad si\ \ x \geq 0 \\ 0, & \end{Bmatrix}$$

a) Si un cliente compró un transformador y se ha estado utilizando por lo menos 6 meses ¿Cuál es la probabilidad que falle antes de los 18 meses?

b) Cada compresor tiene un costo de $20\, u.m.$ y se vende en $32\, u.m.$ y el fabricante da ciertas garantías. Si el compresor falla antes de 3 meses se devuelve el importe de lo pagado. Si falla entre 3 meses y 6 meses, se compromete a asumir el costo de mano de obra de la reparación que tiene un valor de $5\, u.m.$ ¿Cuál es la utilidad esperada por compresor?

Solución:

Vamos a utilizar la siguiente notación:

$x = \{vida\ \text{útil}\ de\ un\ transformador\ , en\ \text{años}\}$

a) Procedemos a calcular la siguiente probabilidad condicional.

$$P < 1.5/x > 0.5 = \frac{P(0.5 < x < 1.5)}{P(x > 0.5)} = \frac{P(0.5 < x < 1.5)}{1 - P(x > 0.5)}$$

$$= \frac{\int_{0.5}^{1.5} \frac{3+x}{8} dx}{1 - \int_{0}^{0.5} \frac{3+x}{8} dx} = \frac{1/2}{\frac{51}{64}} = 0.6274$$

Si el cliente compra un compresor, el que ha funcionado por lo menos seis meses, la probabilidad de que este falle antes de los dieciocho meses es $0{,}6274$.

b) Se define la siguiente variable.

$$U = \{Utilidad\ del\ transformador\ en\ u.m.\}$$

$$(0 < x < 0.25)\ \rightarrow U = 32 - 20 - 32 = -20$$

$$(0.25 < x < 0.5)\ \rightarrow U = 32 - 20 - 5 = 7$$

$$(0.5 < x < 2)\ \rightarrow U = 32 - 20 = 12$$

Calculamos las siguientes probabilidades:

$$P(0 < x < 0.25) = \int_{0}^{0.25} \frac{3+x}{8} dx = \frac{3}{8}x + \frac{x^2}{16}\Bigg|_{0}^{0.25} = 0.097$$

$$P(0.25 < x < 0.5) = \int_{0.25}^{0.5} \frac{3+x}{8} dx = \frac{3}{8}x + \frac{x^2}{16}\Bigg|_{0.25}^{0.5} = 0.105$$

$$P(0.5 < x < 2) = \int_{0.5}^{2} \frac{3+x}{8} dx = \frac{3}{8}x + \frac{x^2}{16}\Bigg|_{0.5}^{2} = 0.796$$

Procedemos a calcular la utilidad esperada:

$$E(U) = \sum_{Rec\ U} U.P(U) = (-20)(0.097) + (7)(0.105) + (12)(0.796) = 8.35\ m.u.$$

Según las condiciones que posee la utilidad de los transformadores, la utilidad esperada es de $8.35\ m.u.$

- Ejemplo 3.

Basándonos en el ejemplo 2 del tema (Función de distribución de variable aleatoria continua), Determinamos en valor esperado de los accidentes de peatones fatales en Guayaquil.

$$E(X) = 42 \int_0^1 x.f(x)dx \rightarrow 42 \int_0^1 x^2(1-x)^5 dx$$

$$42x^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{5x}{4} + 2x^2 - \frac{5x^3}{3} + \frac{5x^4}{7} - \frac{x^5}{8}\right)\Bigg|_0^1 = 0.25$$

El valor esperado de los accidentes peatonales fatales en Guayaquil es de 0.25%

7.5 Media y varianza de una variable aleatoria continua.

Media de una variable aleatoria continua.

- Dada una variable aleatoria X podemos definirla sobre $(\Omega, A, \Pr)$, se denomina valor medio de la variable aleatoria continua X a la siguiente expresión: $\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x.f(x)dx$

"Sea X una variable aleatoria continua, cuyo recorrido es el intervalo $[a, b]$ y sea $f(x)$ su función de densidad." (Walpole, Myers, & Myers, 2012).

Se llama media de la variable continua X al valor:

$$\mu = \int_a^b x.f(x)dx$$

"La esperanza o media de una variable continua con función de densidad f, es: $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\, dx$."(Ontalba, 2011)

Varianza de una variable aleatoria continua.

- Determinamos que la varianza de una variable aleatoria continua X viene dada por la expresión $\sigma^2 = Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 . f(x)dx$

(Spiegel, 2010). “Se llama varianza de una variable aleatoria continua al valor de la siguiente integral: $\sigma^2 = \int_a^b (x-\mu)^2 . f(x)dx$”

(Martín Pliego, 2014). “La varianza de X, denotada como $V(X)$ o σ^2, es:

$$\sigma^2 = V(X) = \int_{-\propto}^{\propto} (x-\mu)^2 . f(x)dx = \int_{-\propto}^{\propto} x^2 . f(x)dx - \mu^2$$

7.5.1 Ejemplos.

- Ejemplo 1.
  En la empresa “Indurama” se fabrican electrodomésticos, siendo X la variable aleatoria que representa el tiempo de duración en horas, de un cierto artefacto eléctrico. Si la función de densidad de probabilidad de X está dada por:

$$F(x) = \begin{Bmatrix} \frac{1}{1000}\exp(-x/1000); & x > 0 \\ 0; \quad para\ cualquier\ otro\ valor \end{Bmatrix}$$

a) Determinar y calcular la media:

a)

$$E(X) = \frac{1}{1000}\int_0^X x\exp(-x/1000)\,dx = 1000\int_0^X u\exp(-u)\,du = 1000\ horas$$

- Ejemplo 2.
  Sea $X \sim U(A.B)$ hemos demostrado que $E(X) = \frac{A+B}{2}$, lo denominamos el punto medio del intervalo. Encontrar la varianza de X.

$$V\,(X\,) = E(X^2\,) - E(X^2\,)$$

$$E(X^2) = \int_{-\propto}^{\propto} x^2\,f(x)dx = \int_A^B x^2\,\frac{1}{B-A}dx = \frac{x^3}{3(B-A)}\Bigg|_A^B = \frac{B^3-A^3}{3(B-A)}$$
$$= \frac{(B-A)(B^2+AB+A^2)}{3(B-A)}$$

Entonces,

$$V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 = \frac{(B^2 + AB + A^2)}{3} - \left(\frac{A+B}{2}\right)^2 =$$

$$V(X) = \frac{4(B^2 + AB + A^2) - 3(A^2 + 2AB + B^2)}{12} = \frac{B^2 + 2AB + A^2}{12} = \frac{(B-A)^2}{12}$$

- Ejemplo 3.
  En la empresa "Papersum", se realiza la venta de suministros de oficina, se desea conocer de sus ventas ¿Cuál es la media y varianza?

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} \; para \; 0 < x < 2 \\ 0 \; si \quad no \end{cases}}$$

$$E(X) = \int_{-\propto}^{\propto} xf(x)dx == \int_0^2 \frac{x}{2}(x)dx =$$

$$E(X) = \int_{-\propto}^{\propto} xf(x)dx == \int_0^2 \frac{x}{2}(x)dx =$$

$$= \int_0^2 \frac{x^2}{2}dx = \frac{x^3}{6}\bigg|_0^2 = \frac{4}{3}$$

$$E(X^2) = \int_0^2 \frac{x}{2}(x^2)dx = \int_0^2 \frac{x^3}{2}dx = \frac{x^4}{8}\bigg|_0^2 = 2$$

VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS Y FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN

Distribución Uniforme Continua

Una variable aleatoria X continua tiene distribución uniforme con parámetros α y β. Según **Webster, A (2001).** ***"****Es una distribución en la cual las probabilidades de todos los resultados son la mismas"*

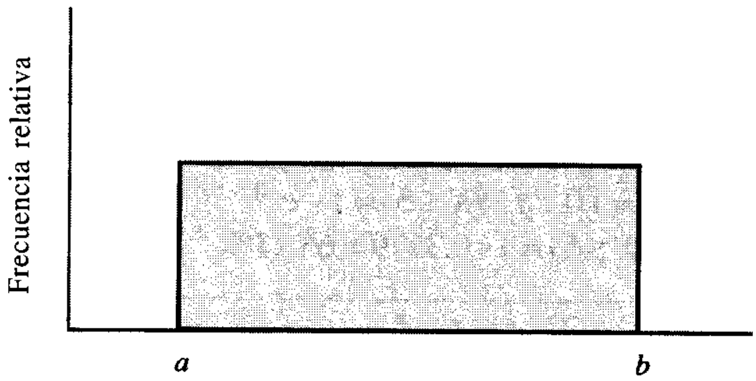


Ilustración 192

Fuente: ***Estadística aplicada a los negocios., Webster, A (2001).***

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{area}{ancho} = \frac{1}{\beta - \alpha}, \quad S = \{x \in R/\alpha \leq x \leq \beta\}}$$

La media y la varianza de una variable aleatoria uniforme están dadas por

Media:

$$\boldsymbol{\mu = \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)}$$

Varianza:

$$\boldsymbol{\sigma^2 = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12}}$$

Ejercicio: El tiempo que se tarda una persona en dar mantenimiento a cierto equipo puede ser modelado como una variable aleatoria uniforme en el intervalo de 30 a 60 minutos. Determine:

a) La probabilidad de que tarde menos de 40 minutos en dar mantenimiento al equipo
b) La probabilidad de que tarde más de 50 minutos en dar mantenimiento al equipo
c) La probabilidad de que tarde entre 35 y 50 minutos en dar el mantenimiento.

La función uniforme es:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{\beta - \alpha} = \frac{1}{60 - 30} = \frac{1}{30}}$$

a.-

$$\boldsymbol{P(30 \leq X \leq 40) = \int_{30}^{40} f(x)dx = \int_{30}^{40} \frac{1}{30} dx = \frac{1}{30} x \Big|_{30}^{40}}$$

$$P(30 \leq X \leq 40) = \frac{1}{30}(40 - 30) = \frac{1}{3}$$

Resp: La probabilidad de que tarde menos de 40 minutos en dar mantenimiento al equipo es del 33.33%

b.-

$$P(50 < X \leq 60) = \int_{50}^{60} f(x)dx = \int_{50}^{60} \frac{1}{30} dx = \frac{1}{30} x \Big|_{50}^{60}$$

$$P(50 < X \leq 60) = \frac{1}{30}(60 - 50) = \frac{1}{3}$$

Resp: La probabilidad de que tarde más de 50 minutos en dar mantenimiento al equipo es del **33.33%**

c.-

$$P(35 \leq X \leq 50) = \int_{35}^{50} f(x)dx = \int_{35}^{50} \frac{1}{30} dx = \frac{1}{30} x \Big|_{35}^{50}$$

$$P(35 \leq X \leq 50) = \frac{1}{30}(50 - 35) = \frac{15}{30} = 0.5$$

Resp: La probabilidad de que tarde entre 35 y 50 minutos en dar el mantenimiento es del **50%.**

Función Gamma

Es un modelo básico en la teoría de la probabilidad. La función Gamma de un valor $\boldsymbol{\alpha > 0}$, se define como:

$$\Gamma(\alpha) = \int_{0}^{\infty} x^{\alpha - 1} e^{-x}\, dx$$

Distribución Gamma

Sea $\boldsymbol{X}$ una variable aleatoria continua, $\boldsymbol{X}$ tiene distribución Gamma con parámetros a>0 y b>0 si su función de densidad es:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-x/\beta} & ,x>0\\ 0, & para\ otro\ x\end{cases}$$

Media:

$$\mu=\alpha\beta$$

Varianza:

$$\sigma^2=\alpha\beta^2$$

Según **Rodríguez, L (2007).** Con respecto al gráfico de la distribución gamma *"Son gráfico asimétrico con sesgo positivo y su dominio es el conjunto de los números reales positivos".*

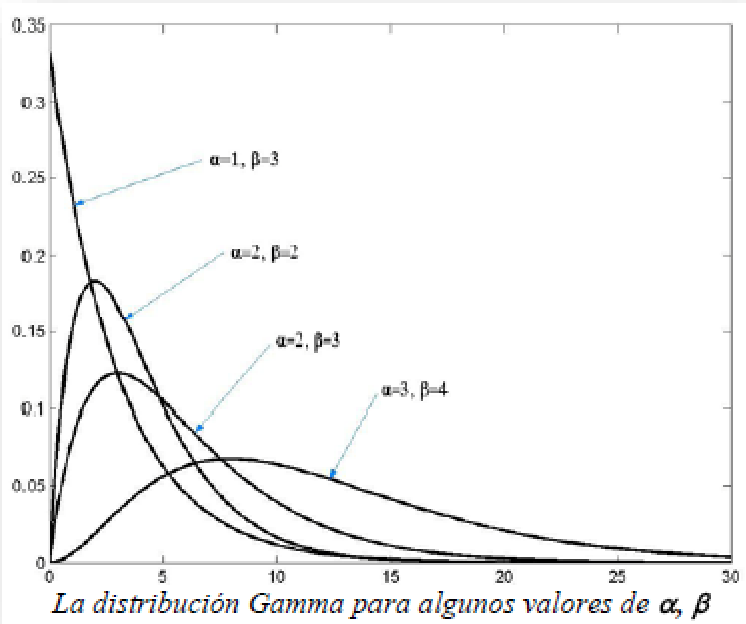


Ilustración 193

Fuente: Probabilidad y estadística básica para ingenieros, Rodríguez, L (2007).

Distribución Exponencial

Cuando $\alpha=1$ la distribución se denomina Distribución Exponencial. En estadística la distribución exponencial es una distribución de probabilidad continua con un parámetro λ > 0 cuya función de densidad es.

$$f(x) = \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta}$$

Media:

$$\mu = \beta$$

Varianza:

$$\sigma^2 = \beta^2$$

Gráfica de la Función Exponencial

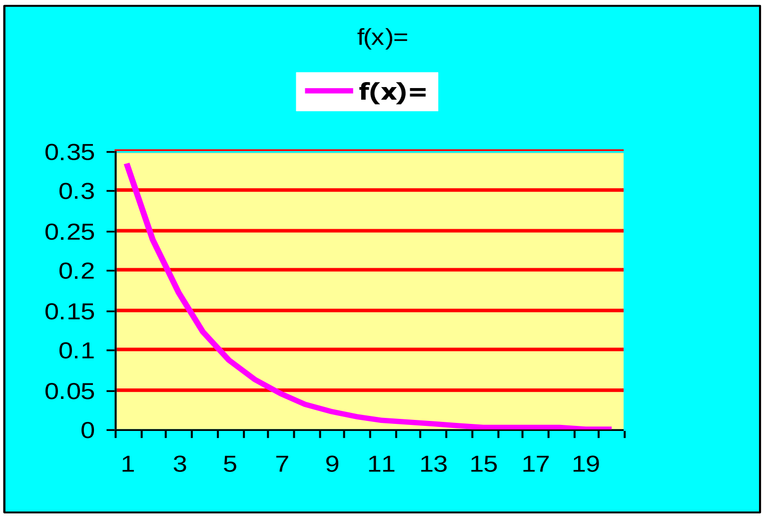


Ilustración 194

Ejercicio: El tiempo entre fallas en un sistema de producción puede ser modelado como una variable aleatoria exponencial con media de 2 horas. Determine:
La probabilidad de que entre una falla y otra no pase más de 3 horas.

Sol: con **media de 2 horas** quiere decir $\mu = 2$, y según el problema se trata de una función exponencial entonces:

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}}$$

La probabilidad que entre una falla y otra no pase más de 3 horas es:

$$P(0 \leq x < 3) = \int_0^3 \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} dx = \frac{1}{2} \int_0^3 e^{-\frac{x}{2}} dx = \frac{1}{2} \left[\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{-1/2} \right]_0^3$$

$$P(0 \leq x < 3) = -\left(e^{-\frac{3}{2}} - e^{0}\right) = -(0.2231 - 1) = 0.7769$$

Resp: La probabilidad que entre una falla y otra no pase más de 3 horas es del 77.69%

La Distribución Normal

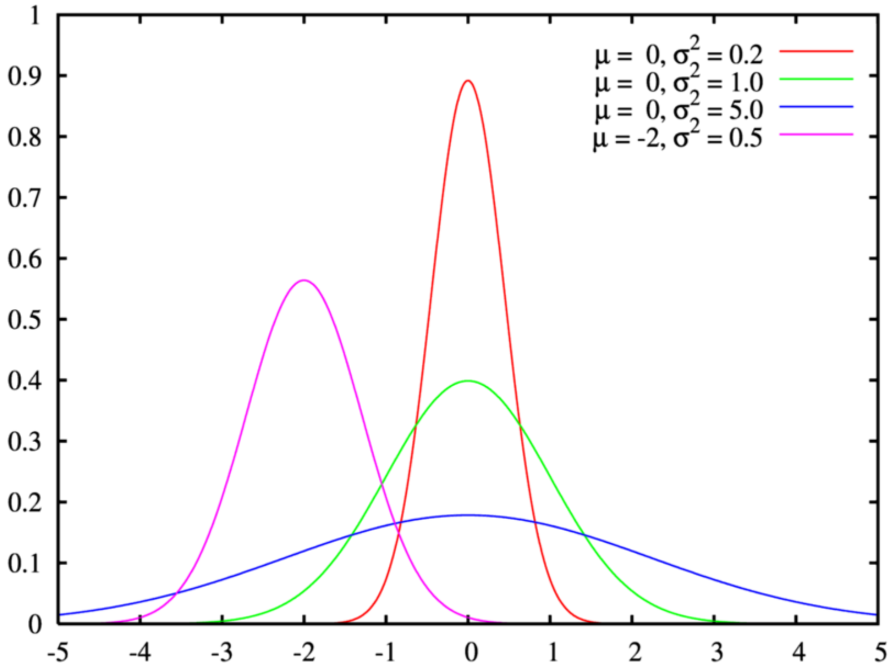
Se trata, sin duda, del modelo continuo más importante en estadística, tanto por su aplicación directa, veremos que muchas variables de interés general pueden describirse por dicho modelo, como por sus propiedades, que han permitido el desarrollo de numerosas técnicas de inferencia estadística. En realidad, el nombre de Normal proviene del hecho de que durante un tiempo se creyó, por parte de médicos y biólogos, que todas las variables naturales de interés seguían este modelo.

Su función de densidad viene dada por la fórmula:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

que, como vemos, depende de dos parámetros μ (que puede ser cualquier valor real) y σ (que ha de ser positiva). Por esta razón, a partir de ahora indicaremos de forma abreviada que una variable X sigue el modelo Normal así: X ~ N (μ, σ). Por ejemplo, si nos referimos a una distribución Normal con μ = 0 y σ = 1 lo abreviaremos N (0, 1).

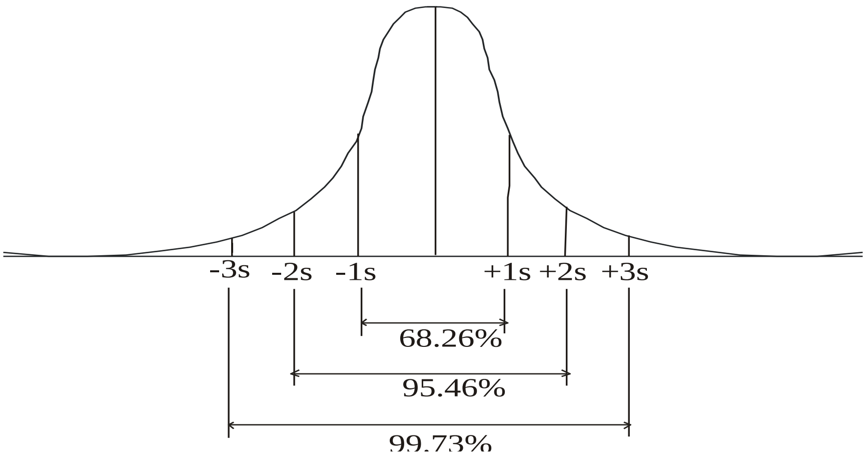
Gráfica de la Función Normal



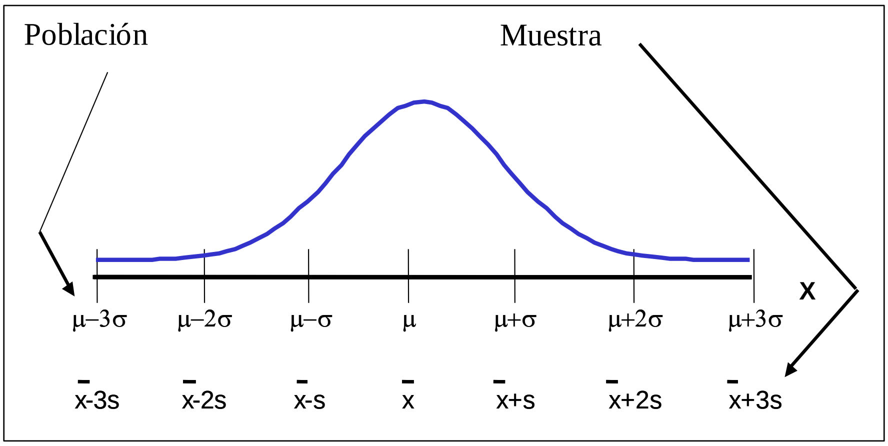
Propiedades de la distribución normal

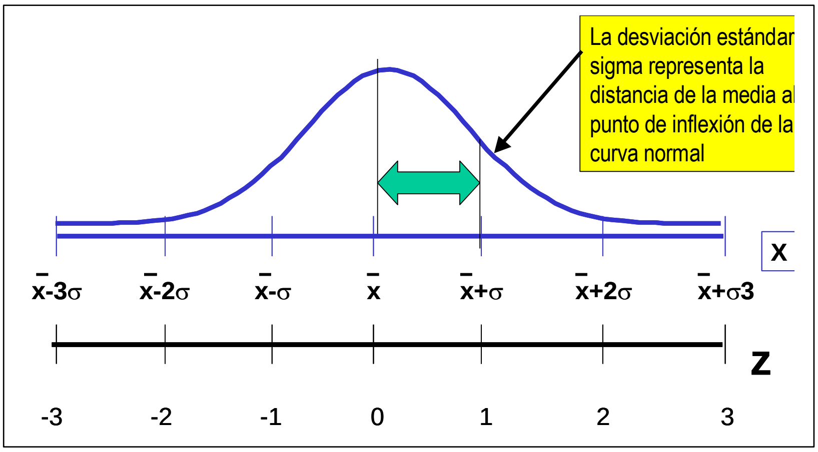
- La distribución normal tiene forma de campana.
- La distribución normal es una distribución de probabilidad que tiene media μ = 0 y desviación estándar σ = 1.
- El área bajo la curva o la probabilidad desde menos infinito a más infinito vale 1.
- La distribución normal es simétrica, es decir cada mitad de curva tiene un área de 0.5.
- La escala horizontal de la curva se mide en desviaciones estándar.
- La forma y la posición de una distribución normal dependen de los parámetros $\mu\, y\, \sigma$, en consecuencia, hay un número infinito de distribuciones normales.

Existe una relación del porcentaje de población a la desviación estándar. En la figura observamos por ejemplo que el área bajo la curva para $\pm 1\sigma$ tiene un porcentaje de 68.26%, $\pm 2\sigma$ = 95.46% y $\pm 3\sigma = 99.73\%$



La población incluye todos los datos, la muestra es una porción de la población.





Ejemplo 1.

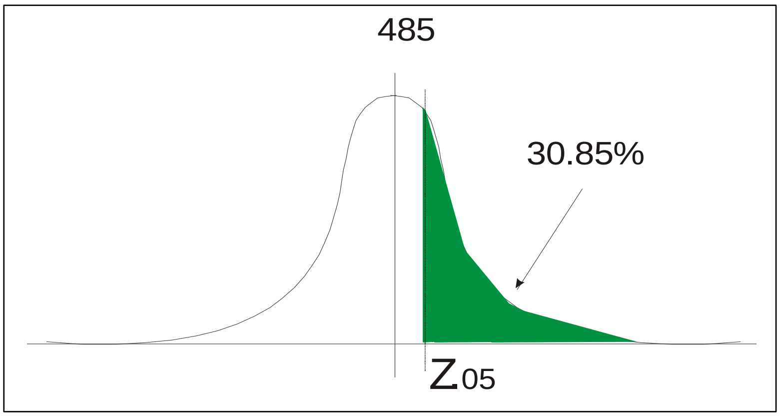
El gerente de personal de una gran compañía requiere que los solicitantes a un puesto efectúen cierta prueba y alcancen una calificación de 500. Si las calificaciones de la prueba se distribuyen normalmente con media $\mu =$ 485 y desviación estándar $\sigma =$ 30 ¿Qué porcentaje de los solicitantes pasará la prueba?

Calculando el valor de Z obtenemos:

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{500-485}{30} = 0.5$$

Buscamos el valor correspondiente Z en las tablas de distribución normal. $Z_{0.5}$ = .69146 = 69.146%. siendo esta la probabilidad de que la calificación sea menor a 500 P (X<500). Dado

que el porcentaje pedido es $P(X \geq 500)$ la solución es 1-.69146 =.3085, 30.85% de los participantes pasarán la prueba.



Sea $Z \sim N(0, 1)$. Hallar

- $P(Z < 1{,}5)$
- $P(Z > -1{,}5)$
- $P(-1{,}5 < Z < 1{,}5)$
- $P(1 < Z < 2)$

Usamos las tablas de la distribución normal para obtener los resultados.

Tenemos

$P(Z < 1{,}5) = 0{,}9332$

$P(Z > -1{,}5) = P(Z > 1{,}5)$ **por simetría**

$= 0{,}9332$

$P(-1{,}5 < Z < 1{,}5) = P(Z < 1{,}5) - P(Z < -1{,}5)$

$= P(Z < 1{,}5) - P(Z > 1{,}5)$

$= P(Z < 1{,}5) -$

$(1 - P(Z < 1{,}5))$

$= 2P(Z < 1{,}5) - 1$

$= 1 \times 0{,}9332 - 1 = 0{,}8664$

$P(1 < Z < 2) = P(Z < 2) - P(Z < 1)$

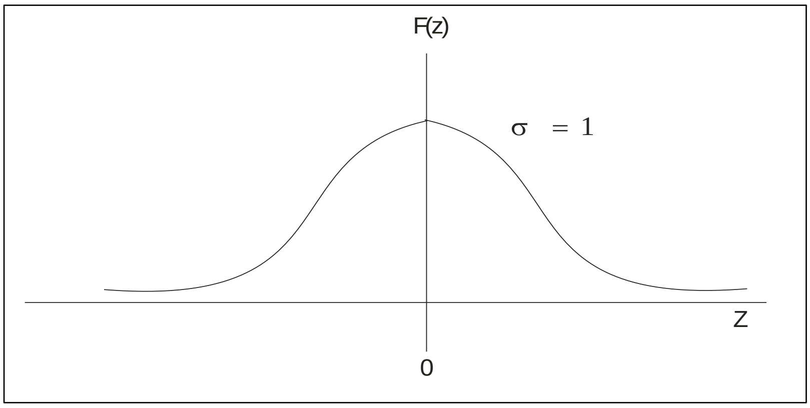
$= 0{,}9772 - 0{,}8413 = 0{,}1359$

La distribución normal estándar

El valor de z: Determina el número de desviaciones estándar σ entre algún valor X y la media de la población μ . Para calcular el valor de Z usamos la siguiente fórmula.

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}$$

La distribución de probabilidad f (Z) es una distribución normal con media 0 y desviación estándar 1; esto es Z se distribuye normalmente con media cero y desviación estándar = 1 Z~N (0,1): La gráfica de densidad de probabilidad se muestra en la figura.



La distribución f (Z) se encuentra tabulada en la tabla de distribución normal estándar. En esta tabla podemos determinar los valores de Z o la probabilidad de determinado valor Z.

Tabla de áreas bajo la curva Normal estándar: N (0,1)
El valor de k se busca así: unidades y décimas: columna de la izquierda, las centésimas: en la fila superior.

$p(Z \leq k) = p = \text{Área coloreada}$

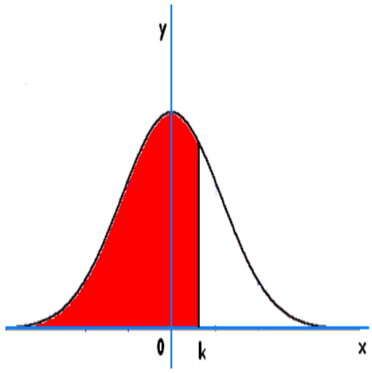
N(0,1)										
k	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Manejo de tablas

Vamos a ver como se calculan probabilidades utilizando la tabla de la Normal Estándar (tipificada) $Z \in N(0,1)$ con algunos casos particulares.

La tabla anterior da los valores de la probabilidad acumulada hasta el valor "k", es decir: $p(Z \leq k)$

Por la simetría de la función de probabilidad de una Normal estándar tenemos:



a) $p(Z \leq k) + p(Z \geq k) = 1$	**b)** $p(Z \geq -k) = p(Z \leq k) \quad k > 0$
c) $p(Z \leq -k) = p(Z \geq k) \quad k > 0$	**d)** $p(t \leq Z \leq k) = p(Z \leq k) - p(Z \leq t)$

Los ejemplos que tienes a continuación están resueltos manejando esa tabla.

1. Probabilidad de que Z tome valores menores o iguales que 1,45

$$p(Z \leq 1'45) = 0'9265$$

2. Probabilidad de que Z tome valores menores o iguales que -1,45

$$p(Z \leq -1'45) = p(Z > 1'45) = 1 - p(Z \leq 1{,}45) = 0{,}0735$$

3. Probabilidad de que Z tome valores entre 1´25 y 2'57

$$p(1'25 \leq Z \leq 2'57) = p(Z \leq 2'57) - p(Z \leq 1'25) = 0'9949 - 0'8944 = 0'1005$$

4. Probabilidad de que Z tome valores entre –2'57 y –1'25

$$p(-2'57 \leq Z \leq -1'25) = (1'25 \leq Z \leq 2'57) = 0'1005$$

5. Probabilidad de que Z tome valores entre –0'53 y 2'46

$$p(-0{,}53 \leq Z \leq 2'46) = p(Z \leq 2'46) - p(Z \leq -0'53) =$$
$$= p(Z \leq 2'46) - p(Z > 0'53) = p(Z \leq 2'46) - (1 - p(Z \leq 0'53))$$
$$= 0'9931 - (1 - 0'7019) = 0'695$$

Cálculo de probabilidades en distribuciones normales. Tipificación

Para calcular la probabilidad de una variable normal X: N (μ,σ) no tipificada, es decir, que no toma los valores $\mu = 0 \quad y \quad \sigma = 1$, se transforma en una variable normal tipificada mediante el cambio: $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ que sigue una distribución de media 0 y desviación típica 1 (tipificada): $Z \in N(0,1)$

En una Normal de media 6 y desviación típica 4, X: N (6,4) calcula: Probabilidad de que X tome valores menores o iguales que 3.

$$p(x \leq 3) = p\left(z \leq \frac{3-6}{4}\right) = p(z \leq -0{,}75) = 1 - p(z \leq 0{,}75) = 1 - 0{,}7734 = 0{,}2266$$

Probabilidad de que X tome valores entre 5 y 8.

$$p(5 \leq x \leq 8) = p\left(\frac{5-6}{4} \leq z \leq \frac{8-6}{4}\right) = p(-0{,}25 \leq z \leq 0{,}5) = 0{,}6915 - 1 + 0{,}5987 = 0{,}2902$$

Cálculo de probabilidades en la distribución normal

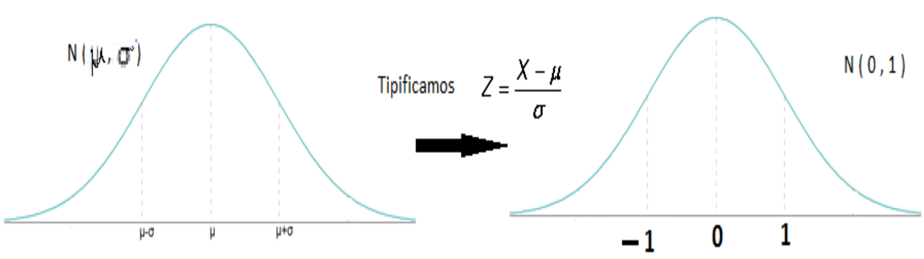
La tabla nos da las probabilidades de P (z ≤ k), siendo z la variable tipificada.

La probabilidad de la variable X dependerá del área del recinto sombreado en la figura. Y para calcularla utilizaremos una tabla.

Tipificación de la variable

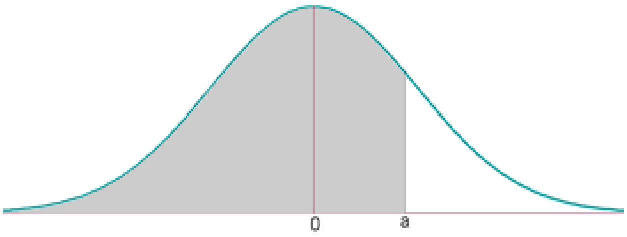
Para poder utilizar la tabla tenemos que transformar la variable X que sigue una distribución N (μ, σ) en otra variable Z que siga una distribución N (0, 1).

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$



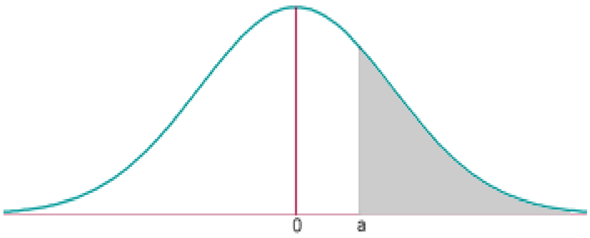
Búsqueda en la tabla de valor de k
Unidades y décimas en la columna de la izquierda. Centésimas en la fila de arriba.

P (Z ≤ a)



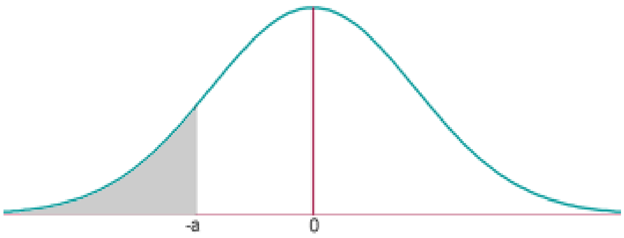
P (Z ≤ 1.47) = 0.9292

P (Z > a) =
1 – P (Z ≤ a)



P (Z > 1.47) =
1 − P (Z ≤ 1.47) =
1 − 0.9292 = 0.0708

P(Z ≤ −a) =
1 − P(Z ≤ a)

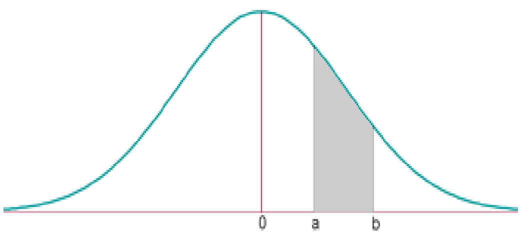


P (Z ≤ −1.47) =
1 – P (Z ≤ 1.47) =
1 − 0.9292 = 0.0708

P(Z > −a) =
P(Z ≤ a)

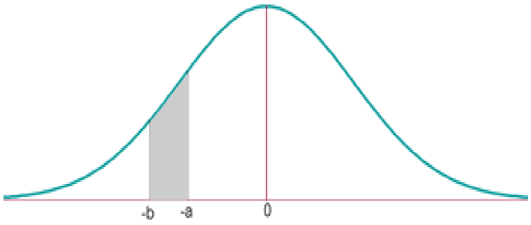
P (Z > −1.47) =
P (Z ≤ 1.47) = 0.9292

P (a < Z ≤ b) =
P (Z ≤ b) – P (Z ≤ a)



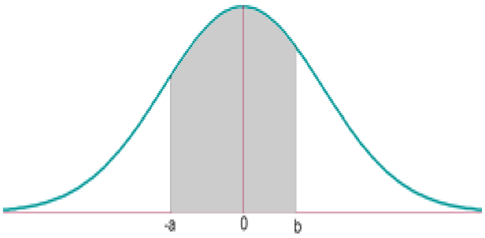
P (0.45 <Z ≤ 1.47) =
P (Z ≤ 1.47) – P (Z ≤ 0.45) =
= 0.9292 − 0.6736
= 0.2556

P (−b < Z ≤ −a) =
= P (a < Z ≤ b)



P (−1.47 <Z ≤ − 0.45)
=P (0.45 <Z ≤ 1.47)
= P (Z ≤ 1.47) – P (Z ≤ .45)
= 0.9292 − 0.6736
= 0.2556

P (−a < Z ≤ b)
= P (Z ≤ b) – [1 – P (Z ≤ a)]



P (-1.47 < Z ≤ 0.45)
P (Z ≤ 0.45) − [1 – P (Z ≤ 1.47)]
= 0.6736 − (1 − 0.9292)
= 0.6028

Ejemplos.

Ejercicio 1: Si X es una variable aleatoria de una distribución N (μ, σ), hallar: P(μ−3σ ≤ X ≤ μ+3σ)

Solución:

$$p\left(\mu-3\sigma\le X\le\mu+3\sigma\right)=p\left(\frac{(\mu-3\sigma)-\mu}{\sigma}\le z\le\frac{(\mu+3\sigma)-\mu}{\sigma}\right)=$$

$$p\left(-3\le z\le 3\right)=p\left(z\le 3\right)-p\left(z\le -3\right)=$$

$$=p\left(z\le 3\right)-\left(1-p\left(z\le 3\right)\right)=$$

$$=0.9987-1+0.9987=0.9974$$

Es decir, que aproximadamente el 99.74% de los valores de X están a menos de tres desviaciones típicas de la media.

Ejercicio 2: En una distribución normal de media 4 y desviación típica 2, calcular el valor de a para que:

P(4−a ≤ x ≤ 4+a) = 0.5934

Solución:

$$p\left(\frac{(4-a)-4}{2}\le z\le\frac{(4+a)-4}{2}\right)=0.5934$$

$$p\left(\frac{-a}{2}\le z\le\frac{a}{2}\right)=p\left(z\le\frac{a}{2}\right)-p\left(z\le-\frac{a}{2}\right)=$$

$$=p\left(z\le\frac{a}{2}\right)-p\left(z\ge\frac{a}{2}\right)=p\left(z\le\frac{a}{2}\right)-p\left(1-p\left(z\le\frac{a}{2}\right)\right)$$

$$2\cdot p\left(z\le\frac{a}{2}\right)-1=0.5934 \qquad p\left(z\le\frac{a}{2}\right)=0.7969$$

$$\frac{a}{2} = 0.83 \qquad\qquad a = 1.66$$

Ejercicio 3: En una ciudad se estima que la temperatura máxima en el mes de junio sigue una distribución normal, con media 23° y desviación típica 5°. Calcular el número de días del mes en los que se espera alcanzar máximas entre 21° y 27°

Solución:

$$p[21 < X \leq 27] = p\left(\frac{21-23}{5} < Z \leq \frac{27-23}{5}\right) =$$
$$= p(-0.4 < Z \leq 0.8) = p(Z \leq 0.8) - [1 - p(Z \leq 0.4)] =$$
$$= 0.7881 - (1 - 0.6554) = 0.4425 \cdot 30 = 13$$

Ejercicio 4: La media de los pesos de 500 estudiantes de un colegio es 70 kg y la desviación típica 3 kg. Suponiendo que los pesos se distribuyen normalmente, halla cuántos estudiantes pesan:

1 entre 60 kg y 75 kg
2 más de 90 kg
3 menos de 64 kg
4 64 kg
5 64 kg o menos

Soluciones: 1 Entre 60 kg y 75 kg

$$p[60 < X \leq 75] = p\left(\frac{60-70}{3} < Z \leq \frac{75-70}{3}\right) =$$
$$= p(-3.33 < Z \leq 1.67) = p(Z \leq 1.67) - [1 - p(Z \leq 3.33)] =$$
$$= 0.9525 - (1 - 0.9996) = 0.9521 \cdot 500 = 476$$

2 más de 90 kg

$$p(X > 90) = p\left(Z > \frac{90-70}{3}\right) = p(Z > 6.67) =$$
$$= 1 - p(Z < 6.67) = 1 - 1 = 0 \cdot 500 = 0$$

3 menos de 64 kg

$$p(X < 64) = p\left(Z < \frac{64-70}{3}\right) = p(Z < -2) = 1 - p(Z \leq 2) =$$
$$= 1 - 0.7772 = 0.02128 \cdot 500 = 11$$

4 64 kg

$$p(X=64)=p\left(Z=\frac{64-70}{3}\right)=p(Z=-2)=0 \cdot 500=0$$

5 64 kg o menos

$$p(X\leq 64)=p(X<64)=11$$

Ejercicio 5: Se supone que los resultados de un examen siguen una distribución normal con media 78 y desviación típica 36. Se pide:

1 ¿Cuál es la probabilidad de que una persona que se presenta el examen obtenga una calificación superior a 72?

2 calcula la proporción de estudiantes que tienen puntuaciones que exceden por lo menos en cinco puntos de la puntuación que marca la frontera entre el Apto y el No-Apto (son declarados No-Aptos el 25% de los estudiantes que obtuvieron las puntuaciones más bajas)

3 Si se sabe que la calificación de un estudiante es mayor que 72 ¿cuál es la probabilidad de que su calificación sea, de hecho, superior a 84?

Soluciones:

1 ¿Cuál es la probabilidad de que una persona que se presenta el examen obtenga una calificación superior a 72?

$$p(X>72)=p\left(Z>\frac{72-78}{36}\right)=$$

$$=p(Z>-0.16)=p(Z<0.16)=0.5636$$

2 Calcular la proporción de estudiantes que tienen puntuaciones que exceden por lo menos en cinco puntos de la puntuación que marca la frontera entre el Apto y el No-Apto (son declarados No-Aptos el 25% de los estudiantes que obtuvieron las puntuaciones más bajas)

$$p(X\leq N)=0.25\Rightarrow p\left(Z\leq\frac{N-78}{36}\right)=0.25$$

$$\frac{N-78}{36}<0 \qquad 1-p\left(Z\leq-\frac{N-78}{36}\right)=0.25$$

$$p\left(Z\leq\frac{-N+78}{36}\right)=0.75\Rightarrow\frac{-N+78}{36}=0.68 \qquad N=54$$

$$p(X>54+5)=p(X>59)=p\left(Z>\frac{59-78}{36}\right)=$$

$$p(Z>-0.53)=p(Z<0.53)=0.7019=70.19\%$$

3 Si se sabe que la calificación de un estudiante es mayor que 72 ¿cuál es la probabilidad de que su calificación sea, de hecho, superior a 84?

$$p(X>84)=p\left(Z>\frac{84-78}{36}\right)=p(Z>0.16)=$$

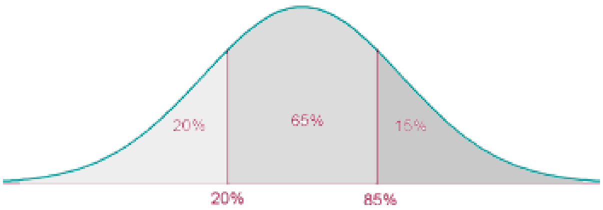
$$=1-p(Z<0.16)=1-0.5636=0.4364$$

$$p(x>84/x>72)=\frac{p[x>84\cap x>72]}{p(x>72)}=$$

$$= \frac{p(x > 84)}{p(x > 72)} = \frac{0.4364}{0.5636} = 0.774$$

Ejercicio 6: Tras un test de cultura general se observa que las puntuaciones obtenidas siguen una distribución una distribución N(65, 18). Se desea clasificar a los examinados en tres grupos (de baja cultura general, de cultura general aceptable, de excelente cultura general) de modo que hay en el primero un 20% la población, un 65% el segundo y un 15% en el tercero. ¿Cuáles han de ser las puntuaciones que marcan el paso de un grupo al otro?

Solución:



$$p(Z \le z_1) = 0.2 \qquad p(Z \le -z_1) = 0.8$$

$$-z_1 = 0.84 \qquad z = -0.84$$

$$\frac{X_1 - 65}{18} = -0.84 \qquad X_1 = 49.88$$

$$p(Z \le z_2) = 0.2 \qquad z_2 = 1.04$$

$$\frac{X_2 - 65}{18} = 1.04 \qquad X_2 = 83.72$$

Baja cultura hasta 49 puntos.
Cultura aceptable entre 50 y 83.
Excelente cultura a partir de 84 puntos.

Ejercicio 7: Varios test de inteligencia dieron una puntuación que sigue una ley normal con media 100 y desviación típica 15

1 Determinar el porcentaje de población que obtendría un coeficiente entre 95 y 110
2 ¿Qué intervalo centrado en 100 contiene al 50% de la población?
3 En una población de 2500 individuos ¿cuántos individuos se esperan que tengan un coeficiente superior a 125?

Soluciones:

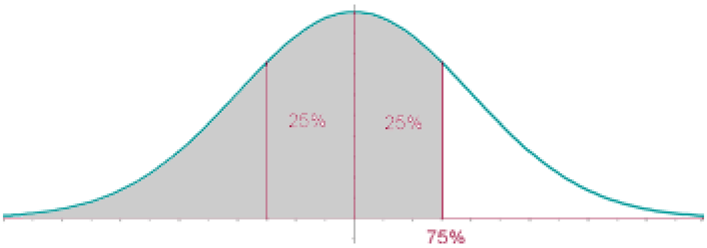
1 Determina el porcentaje de población que obtendría un coeficiente entre 95 y 110

$$p(95 < X \le 110) = p\left(\frac{95-100}{15} < Z \le \frac{110-100}{15}\right) =$$

$$= p(0.33 < Z \le 0.67) = p(Z \le 0.67) - [1 - p(Z \le 0.33)] =$$

$$= 0.7486 - (1 - 0.6293) = 0.3779$$

2 ¿Qué intervalo centrado en 100 contiene al 50% de la población?



$$p = 0.75 \qquad z = 0.675$$

$$\frac{X-100}{15} = 0.675 \qquad X = 110$$

$$(90,\ 110)$$

3 En una población de 2500 individuos ¿cuántos individuos se esperan que tengan un coeficiente superior a 125?

$$p(X > 125) = p\left(Z > \frac{125-100}{15}\right) = p(Z > 1.67) =$$

$$= 1 - p(Z < 1.67) = 1 - 0.9525 = 0.0475 \cdot 2500 = 119$$

Ejercicio 8: En una ciudad una de cada tres familias posee teléfono. Si se eligen al azar 90 familias, calcula la probabilidad de que entre ellas haya por lo menos 30 tengan teléfono

Solución:

$$n = 90 \qquad p = \frac{1}{3} \qquad q = \frac{2}{3}$$

$$n \cdot p > 5 \qquad n \cdot q > 5$$

$$B\left(90, \frac{1}{3}\right) \to N\left(90 \cdot \frac{1}{3}, \sqrt{90 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}\right) = N(30,\ 4.47)$$

$$p(X > 30) = p\left(Z > \frac{30-30}{4.47}\right) = p(Z > 0) = 1 - p(Z \leq 0) = 0.5$$

Ejercicio 9: En un examen tipo test de 200 preguntas de elección múltiple, cada pregunta tiene una respuesta correcta y una incorrecta. Se aprueba si se contesta a más de 110 respuestas correctas. Suponiendo que se contesta al azar, calcula la probabilidad de aprobar el examen

Solución:

$$n = 200 \qquad p = 0.5 \qquad q = 0.5$$

$$n \cdot p > 5 \qquad n \cdot q > 5$$

$$B(200, 0.5) \to N\left(200 \cdot 0.5,\ \sqrt{200 \cdot 0.5 \cdot 0.5}\right) = N(100,\ 7.07)$$

$$p(X > 110) = p\left(Z > \frac{110-100}{7.07}\right) = p(Z > 1.41) =$$

$$= 1 - p(Z < 1.41) = 1 - 0.92073 = 0.07927$$

Ejercicio 10: Un estudio ha mostrado que, en un cierto barrio, el 60% de los hogares tienen al menos dos televisores Se elige al azar una muestra de 50 hogares en el citado barrio. Se pide:

1 ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 20 de los citados hogares tengan cuando menos dos televisores?

2 ¿Cuál es la probabilidad de que entre 35 y 40 hogares tengan cuando menos dos televisores?

Soluciones:

1 ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 20 de los citados hogares tengan cuando menos dos televisores?

$$n = 50 \qquad p = 0.6 \qquad q = 0.4$$

$$n \cdot p > 5 \qquad n \cdot q > 5$$

$$B(50, 0.6) \rightarrow N\left(50 \cdot 0.6, \sqrt{50 \cdot 0.6 \cdot 0.4}\right) = N(30,\ 3.46)$$

$$p(X > 20) = p\left(Z > \frac{20 - 30}{3.46}\right) =$$

$$p(Z > -2.89) = p(Z \leq 2.89) = 0.9981$$

2 ¿Cuál es la probabilidad de que entre 35 y 40 hogares tengan cuando menos dos televisores?

$$p(35 < X \leq 40) = p\left(\frac{35 - 30}{3.46} < Z \leq \frac{40 - 30}{3.46}\right) =$$

$$= 0.9981 - 0.9265 = 0.0716$$

Aproximación De La Distribución Binomial Por La Normal

Teorema de Moivre

Si: **n·p ≥ 0** y **n·q ≥ 0**, la **distribución binomial B(n, p)** se puede aproximar mediante una **distribución normal**:

$$N\left(np, \sqrt{npq}\right)$$

$$N(np, \sqrt{npq})$$

$$\nearrow$$

$$B(n, p) \qquad \downarrow$$

$$\searrow$$

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{npq}} \rightarrow N(0,1)$$

Ejemplo: En una ciudad una de cada tres familias posee teléfono. Si se eligen al azar 90 familias, calcula la probabilidad de que entre ellas haya por lo menos 30 tengan teléfono.

$$n = 90 \qquad p = \frac{1}{3} \qquad q = \frac{2}{3}$$

$$n \cdot p > 5 \qquad n \cdot q > 5$$

$$B\left(90, \frac{1}{3}\right) \rightarrow N\left(90 \cdot \frac{1}{3}, \sqrt{90 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}\right) = N(30,\ 4.47)$$

$$p(X > 30) = p\left(Z > \frac{30 - 30}{4.47}\right) = p(Z > 0) = 1 - p(Z \leq 0) = 0.5$$

Distribución Weibull

La distribución de Weibull complementa a la distribución exponencial y a la normal, se usa cuando se sabe de antemano que una de ellas es la que mejor describe la distribución de fallos o cuando se han producido muchos fallos (al menos 10) y los tiempos correspondientes no se ajustan a una distribución más simple.

La distribución de Weibull nos permite estudiar cuál es la distribución de fallos de un componente clave de seguridad que pretendemos controlar y que a través de nuestro registro de fallos observamos que éstos varían a lo largo del tiempo y dentro de lo que se considera tiempo normal de uso.

La distribución de Weibull se representa normalmente por la función acumulativa de distribución de fallos F (t):

$$F(t) = 1 -$$

Siendo la función densidad de probabilidad:

$$f(t) = \frac{\beta}{\eta}\Big($$

La tasa de fallos para esta distribución es:

$$\lambda(t) = \frac{\beta}{\eta}\Big($$

Las ecuaciones (1), (2) y (3) sólo se aplican para valores de $(t - t_0) \geq 0$. Para valores de $(t - t_0) < 0$, las funciones de densidad y la tasa de fallos valen 0. Las constantes que aparecen en las expresiones anteriores tienen una interpretación física:

- **t_0** es el parámetro de posición (unidad de tiempos) 0 vida mínima y define el punto de partida u origen de la distribución.
- **η** es el parámetro de escala, extensión de la distribución a lo largo, del eje de los tiempos. Cuando $(t - t_0) = \eta$ la fiabilidad viene dada por:
  R (t) = exp - $(1)^{ß}$ = 1/exp $1^{ß}$ = 1 / 2,718 = 0,368 (36,8%)
  Entonces la constante representa también el tiempo, medido a partir de $t_0 = 0$, según lo cual dado que F (t) = 1 - 0,368 = 0,632, el 63,2 % de la población se espera que falle, cualquiera que sea el valor de ß ya que como hemos visto su valor no influye en los cálculos realizados. Por esta razón también se le llama usualmente vida característica.
- **ß** es el parámetro de forma y representa la pendiente de la recta describiendo el grado de variación de la tasa de fallos.

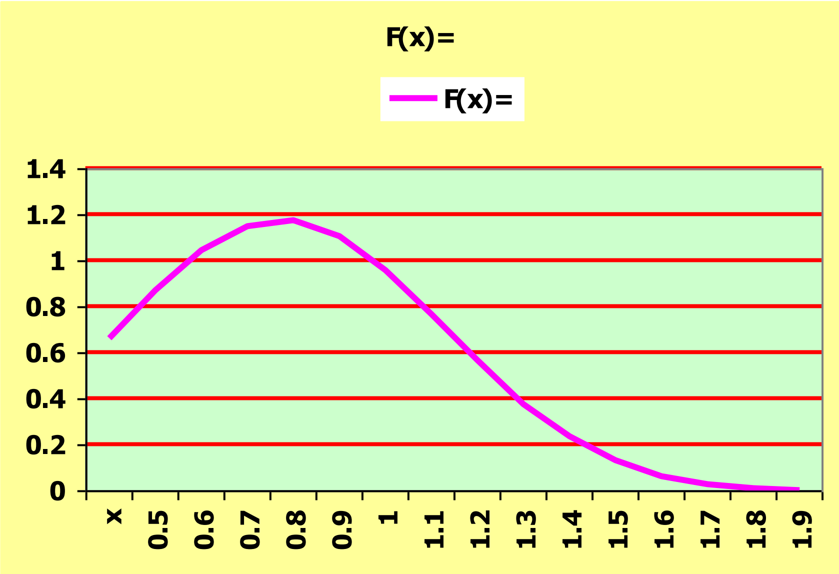


Ilustración 196

7.6 Ejercicios propuestos.

Ejercicio 1: Sea X una variable aleatoria continua con densidad dada por:

$$f(x) = \begin{cases} c(2-x) & si \;\; 0 \le x \le 2 \\ 0 \; en \; caso \; contrario \end{cases}$$

a) Encontrar el valor de c y graficar $f(x)$.

b) Obtener y graficar $F(x)$.

c) Calcular $P(1 \le \;\; X \le \;\; 2)$.

d) Calcular $E(X) \; y \; V \; (X)$.

Ejercicio 2: El tiempo de vida (en horas) de cierto equipo electrónico es una variable aleatoria continua con función de densidad dada:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \;\; x \le 100 \\ 100/x^2 & si \; x > 100 \end{cases}$$

a) Verificar que ésta es una función de densidad.

b) Calcular la probabilidad de que uno de esos equipos electrónicos debe ser cambiado antes de 150 horas de operación.

c) Calcule la media del tiempo de vida de estos equipos electrónicos.

Ejercicio 3: Se sabe que en la Empresa "Ecuacoffee" produce chocolate y que la proporción de impurezas que aparecen en un producto es una variable aleatoria con función de densidad dad por:

$$f(x)=\begin{cases} ax+b & \textbf{si } 0<x<1 \\ 0 & \textbf{en el resto} \end{cases}$$

a) Sabiendo que el promedio de dicha variable es $\mu = 2/3$, calcula el valor de a y b. Represéntala.

b) Halla su función de distribución.

c) Calcula $P(X<2/3)$.

Ejercicio 4: Sea la variable aleatoria X representa el tiempo de producción del Yogurt en la Empresa Industria Lácteas Tony, en años, de una cierta bacteria. Sea la función:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{k}{x} & \textbf{si } 1\le x\le 2 \\ 0 & \textbf{resto} \end{cases}$$

a) Determina el valor de k para que $f(x)$ sea una función de densidad.

b) Halla la función de distribución de X. Represéntala.

c) Calcula el tiempo medio de producción del Yogurt. Calcula la varianza, y la media.

Ejercicio 5: Sea la variable aleatoria X, cuya función de distribución $F(x)$ viene dada por:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \textbf{si } x<2 \\ (x-2)^2 & \textbf{si } 2\le x\le 3 \\ 1 & \textbf{si } x>3 \end{cases}$$

a) Calcule la función de densidad, $f(x)$, de la variable X.

b) Obtener las siguientes probabilidades: $P(1<X<5/2)$, $P(5/2\le X\le 7/2)$.

Ejercicio 6: Considera la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4} & \text{si} \quad x\in[2,\,6]\\ 0 & \text{si} \quad x\notin[2,\,6]\end{cases}$$

a) Comprueba que es una función de densidad.

b) Halla la función de distribución $\boldsymbol{F}$ de la variable aleatoria $\boldsymbol{X}$ cuya función de densidad es $\boldsymbol{f(x)}$ y represéntala gráficamente.

c) Calcula $\boldsymbol{P}\ (\mathbf{3{,}6}\ \leq\ \boldsymbol{X}\ \leq\ \mathbf{5{,}2}\ )$

Ejercicio 7: La función de densidad de una variable aleatorio continua $\boldsymbol{X}$ es:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{si} \quad x<0\\ k\cdot\left(x^2-3x\right) & \text{si} \quad 0\leq x\leq 3\\ 0 & \text{si} \quad x>3\end{cases}$$

a) Calcula el valor de $\boldsymbol{k}$ para que $\boldsymbol{f}\ (\ \boldsymbol{x}\ )$ sea función de densidad.

b) Determina la función de distribución $\boldsymbol{F}\ (\ \boldsymbol{x}\ )$.

Ejercicio 8: Sea X una variable aleatoria cuya función de densidad viene dada por $f\ (X)$, calcula su función de distribución:

$$f(x)=\begin{cases}X/2 & 0\leq x\ \leq\ 2\\ 0; & en\ otro\ caso\end{cases}$$

a) Calcular la función de distribución.

Ejercicio 9: En una fábrica de insumos alimenticios se ha determinado que el número de insumos defectuosos producidos en el turno de la mañana es una variable aleatoria con la siguiente distribución de probabilidad:

x	0	1	2	3	4
P(X=x)	0.90	0.06	0.02	0.01	0.01

a) Hallar la esperanza de esa distribución de probabilidad.

b) Calcular la Varianza de esta distribución de probabilidad.

Ejercicio 10: Sea X la temperatura a que tiene lugar cierta reacción alérgica, y sea su densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}(4 - x^2) & si \quad -1 \leq x \leq 2 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

a) Hallar la función de distribución.

b) Calcular la media.

Bibliografia

Alvarado, A. A. (2013). *Probabilidad y Estadística*.

Canavos, G. C. (2013). Probabilidad y Estadística Aplicaciones y métodos.

GERT, M. (2012). Teoría de probabilidades y estadística matemática.

Martín-Pliego, F. y.-M. (2015). Fundamentos de Probabilidad.

P. Ibarrola, L. P. (2009). Teoría de la Probabilidad.

Render, S. &. (2012). Concepto de probabilidades y aplicaciones.

S., P. D., & Fernández., S. P. (2010). Cálculo de probabilidades: nociones básicas. La Coruña.

Santalo, L. (2013). Probabilidad e inferencia estadística. Organización de los estados Americanos: 3ª . edición.

Higgins, P. (2008). *Number Story: From Counting to Cryptography*. New York: Copernicus.

Webster, A. (2009). Estadística Aplicada a la Economía y los Negocios. Bogotá: 3era Edición.

Harnett, D. Y Murphy, J. (1987). "Introducción al análisis estadístico" Addison - Wesley

Canavos, G. (1998). "Probabilidad y estadística." Mc Graw Hill.

webster, a (2001). "*Estadisticas aplicada a los negocios y economia." Bradley University,p.21-p.29, p.105-p.127,* irwin Mcgraw-hill.

Rodríguez, L (2007). "Probabilidad y Estadística básica para ingenieros", edición escuela superior politécnica del litoral, instituto de ciencia matemáticas, p.17-p.138, Guayaquil, Ecuador.

Centella, S (2011). "*Matemáticas", p.30, p.31, editorial don Bosco, Ecuador.*

Sáez, A (2012). "*Apuntes de Estadística para ingenieros.",* p.20-p.22, *universidad de Jaén*, España.

Estuardo, G (2012). "*Estadísticas y probabilidades.",* p.6-p.90, *Universidad católica de la santísima concepción,* Chile.

Valdiviezo, A. (2014). Facultad de ciencias matemáticas y físicas.

8. Conjuntos y Estadísticas Neutrosóficas

Introducción

Neutrosofía significa conocimiento del pensamiento neutro, y este tercer / neutral representa la distinción principal, es decir, la parte neutra / indeterminada / desconocida (además de la "verdad" / "pertenencia" y "falsedad" Componentes de "no pertenencia" que aparecen en la lógica borrosa / conjunto). La lógica neutrosófica (LN) es una generalización de la lógica difusa de Zadeh (LD), y especialmente de la lógica difusa intuitiva (LDI) de Atanassov, y de otras lógicas multivaluadas (Figura 1) (Leyva-Vázquez & Smarandache, 2018).

.

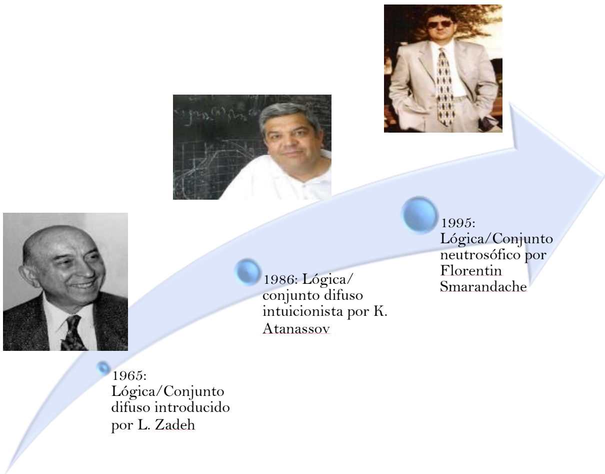


Ilustración 197. Neutrosófica y sus antecedentes fundamentales (Leyva-Vázquez & Smarandache, 2018).

Sea U ser un universo de discurso, y M un conjunto incluido en U. Un elemento x de U se anota con respecto al conjunto M como x (T, I, F) y pertenece a M de la siguiente manera: es t % verdadero en el conjunto, i% indeterminado (desconocido s) en el conjunto, y f% falso, donde t varía en T, i varía en I y f varía en F. Estáticamente T, I, F son subconjuntos, pero dinámicamente T, I, F son funciones / operadores que dependen de muchos parámetros conocidos o desconocidos (Leyva-Vázquez, Hernandez, & Smarandache, 2018).

Los conjuntos neutrosóficos generalizan el conjunto difuso (especialmente el conjunto difuso e intuicionista), el conjunto paraconsistente, el conjunto intuitivo y otros. Permite manejar un mayor número de situaciones que se dan en la realidad.

Un número es estadístico neutrosófica es una número de la siguiente forma (Smarandache, 2014):

$$N = d + i$$

Donde d es la parte determinada e i es la parte indeterminada. Por ejemplo s: a=5 +1 si i ∈ $[5, 5.4]$ el número es equivalente a a ∈ $[5, 5.4]$.

En el transcurso de presente libro se abordará implementaciones prácticas de la propuesta. Google Colaboratory es una aplicación web que permite crear y compartir documentos que contienen código, fuente, ecuaciones, visualizaciones y texto explicativo tal como se muestra.

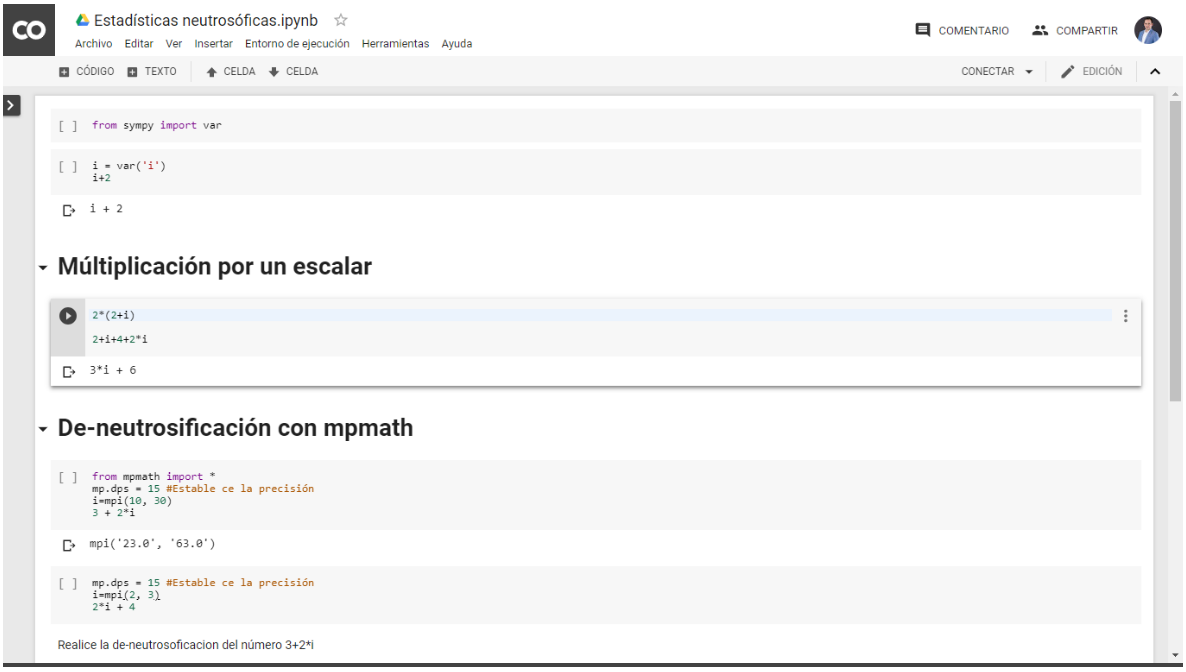
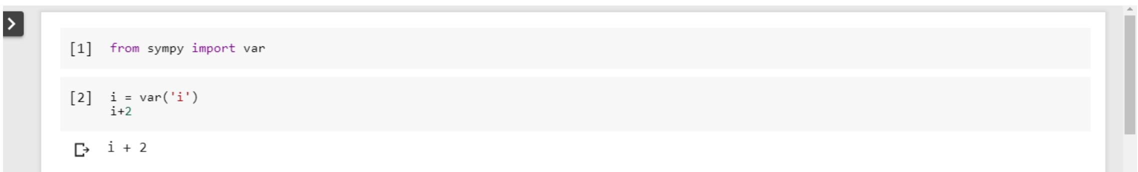


Ilustración 198. Google Colaboratory

Jupyter permite interactuar con varios lenguajes de programación, en este caso usaremos Python, un lenguaje de programación bastante sencillo y poderoso, con acceso a una gran variedad de librerías útiles.

Para el trabajo computacional con números neutrosóficos en el lenguaje python se puede emplear SymPy . SymPy es una biblioteca escrita en lenguaje Python con el propósito de reunir todas las características de un sistema de álgebra computacional, ser fácilmente extensible y mantener el código de la forma más simple posible (Meurer et al., 2017).



Es por ello que se requiere un procesos de-neutrosificación (Salmerona & Smarandacheb, 2010). $I \in [0,1]$ es reemplazado por sus valores máximos y mínimos .

Para la de-neutrosificación es necesario el trabajo con aritmética intervalar.

```
[7]  from mpmath import *
     mp.dps = 15
     i=mpi(2, 3)
     2*i + 4

     mpi('8.0', '10.0')
```

En este caso trabajamos con la librería mpmath y con el tipo mpi {Johansson, 2013 #275}. El tipo mpi maneja los intervalos un par de valores mpf. La aritmética en intervalos utiliza un redondeo conservador de modo que, si un intervalo se interpreta como un intervalo de incertidumbre numérica para un número fijo, cualquier secuencia de operaciones de intervalo producirá un intervalo que contenga el resultado de aplicar la misma secuencia de operaciones al número exacto.

Ejercicio 1. Realice la de-neutrosificación del siguiente número neutrosófico 3+2*i con $i \in [10,30]$. Utilice la libreria mpmath.

R.

De-neutrosificación con mpmath

```
from mpmath import *
mp.dps = 15 #Establece la precisión
i=mpi(10, 30)
3 + 2*i

mpi('23.0', '63.0')
```

Una matriz neutrosófica, por su parte, es una matriz donde los elementos $a = (a_{ij})$ han sido reemplazados por elementos en $\langle R \cup I \rangle$, donde $\langle R \cup I \rangle$ es un anillo neutrosófica entero (W. V. Kandasamy & Smarandache, 2013).

Un grafo neutrosófico, es un grafo en el cual al menos un arco es un arco neutrosófico (W. B. V. Kandasamy & Smarandache, 2003). La matriz de adyacencia neutrosófica. Los arcos significan: 0 = no hay conexión entre nodos, 1 = conexión entre nudos, I = conexión indeterminada (desconocida si es o si no). Tales nociones no se utilizan en la teoría difusa, un ejemplo de muestra a continuación:

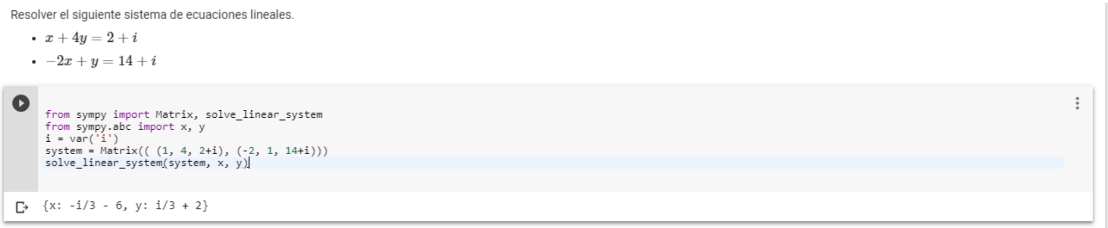
$$\begin{matrix} 0 & 0 & I \\ I & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}$$

En este caso se pueden resolver sistemas de ecuaciones lineales neutrosóficas{Ye, 2017 #276}.

Por ejemplo el sistema de ecuaciones:

$$x + 4y = 2 + i$$
$$-2x + y = 14 + i$$

Se resuelve de la siguiente forma:


Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

- $x + 4y = 2 + i$
- $-2x + y = 14 + i$

```
from sympy import Matrix, solve_linear_system
from sympy.abc import x, y
i = var('i')
system = Matrix(( (1, 4, 2+i), (-2, 1, 14+i)))
solve_linear_system(system, x, y)
```

```
{x: -i/3 - 6, y: i/3 + 2}
```

Ejercicio determinar el flujo del tráfico en las siguientes intercepciones.

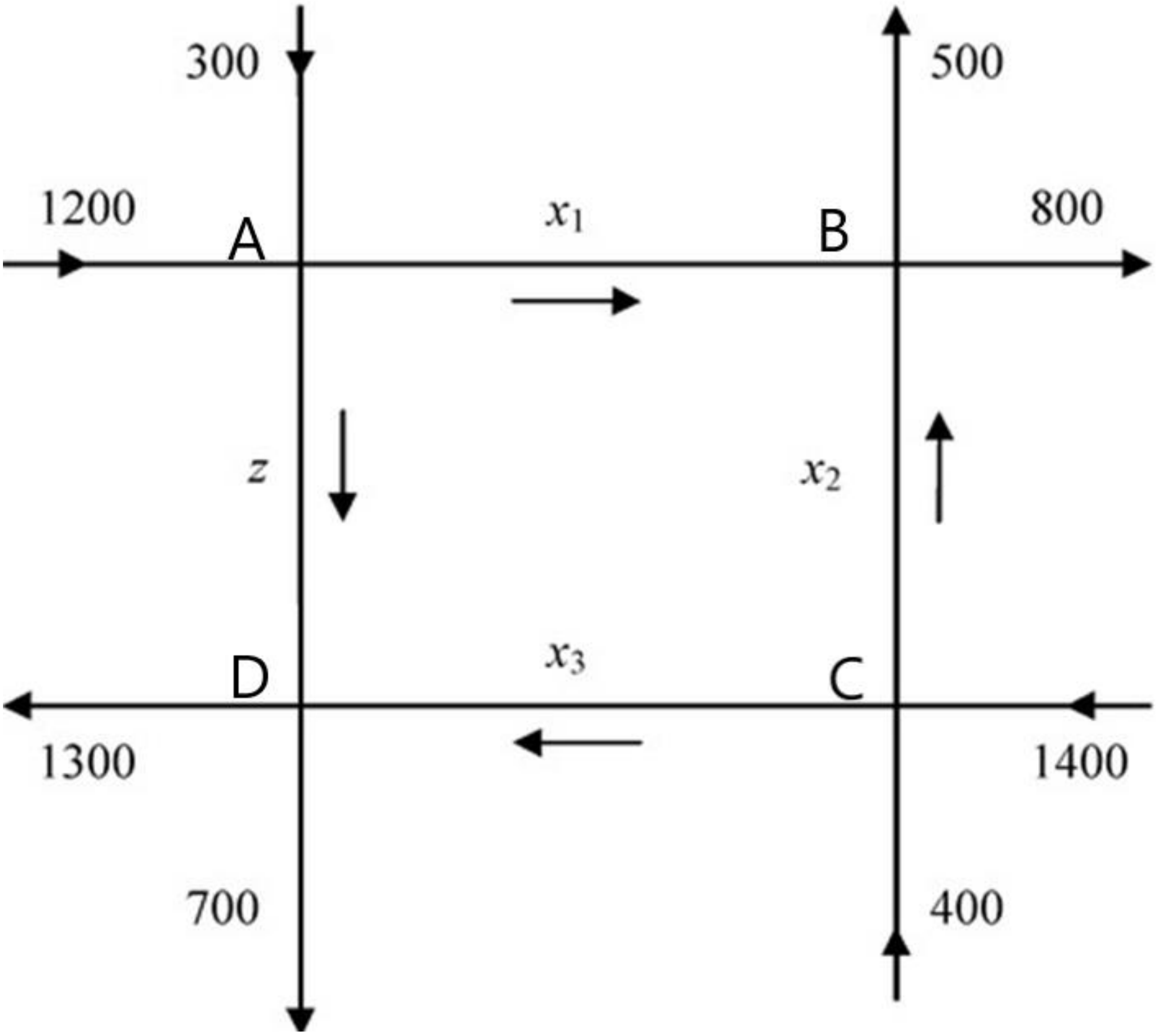


Ilustración. Flujo vehicular

En cada intercepción el flujo de salida debe ser igual al flujo de entrada.

Intercepción A: $1500 = x_1 + z$

Intercepción B: $1300 = x_1 + x_2$

Intercepción C: $1800 = x_2 + x_3$

Intercepción D: 2000= $x_3 + z$

Si z=400

Entonces el sistema de ecuaciones queda de la siguiente forma

$$x_1 = 1100$$

$$x_1 + x_2 = 1300$$

$$x_2 + 2x_3 = 3400$$

La solución para este sistema es la siguiente:

$$x_1 = 1100$$

$$x_2 = 200$$

$$x_3 = 300$$

```
[39]  from sympy import Matrix, solve_linear_system
      from sympy.abc import x, y, z

      system = Matrix(( (1,0,0, 1100), (1, 1, 0, 1300), (0, 1, 2,3400)))

      solve_linear_system(system, x, y, z)

{x: 1100, y: 200, z: 1600}
```

En el caso de Z=400+I.

Entonces el sistema de ecuaciones queda de la siguiente forma

$$x_1 = 1100 - I$$

$$x_1 + x_2 = 1300$$

$$x_1 + 2x_3 = 3400 - I$$

La solución para este sistema es la siguiente:

$x_1 = 1100$-i

$x_2 = 200$+i

$$x_3 = 1600 - i$$

```
from sympy import Matrix, solve_linear_system
from sympy.abc import x, y, z

system = Matrix(( (1,0,0, 1100-i), (1, 1, 0, 1300), (0, 1, 2,3400-i)))

solve_linear_system(system, x, y, z)
```

Ejercicio: A partir del ejemplo reflejado en la ilustración 198 calcule el flujo para $Z = 500 + I$

9. Lógica neutrosófica

➢ Introducción

La Lógica Neutrosófica proporciona un mecanismo de inferencia que permite simular los procedimientos de razonamiento humano en sistemas basados en el conocimiento. La teoría de la lógica neutrosófica proporciona un marco matemático que permite modelar la incertidumbre de los procesos cognitivos humanos de forma que pueda ser tratable por las computadoras. En este primer capítulo se describirán los fundamentos y características de este mecanismo de representación de la incertidumbre.

9.1 Lógica neutrosófica

Los seres humanos poseen habilidades para comunicar sus experiencias empleando reglas lingüísticas vagas. Por ejemplo, un famoso cocinero de televisión podría dar instrucciones para tostar pan como:

1. Cortar dos rebanadas de pan medianas.
2. Poner el horno a temperatura alta.
3. Tostar el pan hasta que quede de color ligeramente marrón.

El uso de esos términos lingüísticos podría ser seguido sin problema por un humano, que es capaz de interpretar estas instrucciones rápidamente. La lógica convencional no es adecuada para procesar este tipo de reglas.

Por ejemplo, al pasar un día para aprender a jugar al golf, (Ilustración 198), al final de la jornada se tiene un montón de reglas del tipo:

- Si la bola está lejos del hoyo y el green está ligeramente inclinado hacia la derecha, entonces hay que golpear la bola firmemente empleando un ángulo ligeramente inclinado hacia la izquierda de la bandera.
- Si la bola está muy cerca del hoyo y el green entre la bola y el hoyo está plano, entonces hay que golpear la bola directamente hacia el hoyo.

Ilustración 198

Las reglas que se obtienen son muy descriptivas y pueden ser fácilmente entendibles por un humano, pero difícilmente representables en un idioma que pueda ser entendido por las computadoras. Palabras como “lejos”, “muy cerca” no tienen fronteras bien definidas, y cuando se quiere trasladar a código pueden resultar descripciones artificiales. Por ejemplo, el término Distancia se podría codificar con los siguientes conjuntos de intervalos:

- Cerca: La bola está entre 0 y 2 metros del hoyo
- Medio: La bola está entre 2 y 5 metros del hoyo
- Lejos: La bola está más allá de 5 metros del hoyo

Con esta representación, ¿qué ocurre con una bola que está en 4.99 metros del hoyo? Empleando estos intervalos, la computadora la representa en el intervalo “Medio”. Y si se incrementa en unos pocos centímetros, asume la catalogaría “Lejos”. Esto se puede mejorar creando intervalos más pequeños, pero el problema base seguiría siendo el mismo por el uso de intervalos discretos. Comparado con el modo de razonar de un humano, estos términos lingüísticos se deben corresponder con fronteras vagas, donde 4.99 metros debería estar más asociado al término “lejos” que “media distancia”.

Por lo que queda claro que el conocimiento experto presenta a menudo, características de vaguedad e imprecisión, debido a tres razones principales

1. **Pereza**: Obtener una lista completa de todas las variables que intervienen en el dominio del problema puede ser demasiado trabajoso. Además, como el mundo real es no determinista (aleatoriedad y excepciones), hay veces que no es posible establecer completamente todas las variables del entorno.

2. **Ignorancia Teórica**: En la que no existe una lista completa de factores a tener en cuenta para el dominio del problema (no se conoce un método teórico para modelar el problema).
3. **Ignorancia Práctica**: Incluso conociendo todas las variables, puede ser difícil obtener datos concretos asociados para su estudio. Esta información puede estar incompleta, e incluso ser errónea.

Esta incertidumbre en el modelado de conocimiento experto existe en multitud de disciplinas (médicas, ciencias, ingeniería, derecho, educación...). En Inteligencia Artificial se aplica en multitud de áreas de trabajo, como visión por computadora, procesamiento del lenguaje natural, procesamiento de la información, aprendizaje automático, juegos, etc.

9.1.1 Métodos para el tratamiento de la Incertidumbre

Para el tratamiento de la incertidumbre existen multitudes de enfoques. Las primeras aproximaciones vienen desde principios del siglo XIX, con un tratamiento de la información puramente probabilista. Los primeros sistemas expertos de inicio de los 70 modelaron el conocimiento con un enfoque puramente lógico, con las limitaciones que conlleva este tipo de enfoques. La siguiente generación de sistemas expertos emplearon técnicas probabilistas con resultados prometedores. El principal problema de esta aproximación fue el crecimiento exponencial de las probabilidades necesarias para calcular la distribución conjunta de probabilidad cuando el número de variables aumentaba. De esta forma, surgieron otras aproximaciones entre las que cabe destacar:

- **Métodos no Numéricos**

Existen algunas aproximaciones no numéricas que utilizan un razonamiento mucho más cercano al humano (cualitativo). Uno de los métodos más ampliamente estudiados en esta categoría es el razonamiento por defecto, que trata las conclusiones de los sistemas de reglas como válidas hasta que se encuentre una razón mejor para creer alguna otra cosa. Las redes cualitativas y los sistemas de mantenimiento de coherencia son otros ejemplos de métodos no numéricos para el tratamiento de la incertidumbre.

- **Métodos Numéricos**

Entre los métodos numéricos, cabe destacar la familia de los métodos probabilistas, que asocian un valor numérico (grado de creencia) entre 0 y 1 para resumir la incertidumbre sobre las oraciones. Así, una probabilidad de 0.8 sobre una oración no significa 80 % verdadero, sino un 80 % de grado de creencia sobre la oración (las creencias dependen de las percepciones recibidas por el agente inteligente hasta el momento, que constituyen la evidencia sobre la que se hacen las afirmaciones sobre probabilidades. Las probabilidades pueden cambiar cuando se adquieren más evidencias.

9.1.2 Ejemplo de probabilidades

Un ejemplo es, al tirar un dado en una superficie agrietada, como se muestra en la ilustración 199.

Ilustración 199

A partir de la observación que se realiza en la figura 2, se obtienen las indeterminaciones que se muestran a continuación:

$$\{1,2,3,4,5,6\}$$

Dichas indeterminaciones significan que en un espacio muestral de un dado cúbico (con 12 aristas y 8 vértices) arrojado en una superficie irregular se tiene la posibilidad de que el mismo caiga en un vértice o en un borde en una pequeña rendija o grieta (no en uno de sus caras). Por lo tanto, tirar el dado puede activar un resultado indeterminado. De ahí, la probabilidad neutrosófica NP_T de lanzar, por ejemplo {1}, es menor que 1/6, puesto que hay siete resultados posibles menor que NP_T (1) < (1/6), lo que no es igual como en las probabilidades clásicas donde P (1) = (1/6).

Existen varias familias de técnicas probabilistas que son útiles para el tratamiento de eventos como el antes referido, entre las familias más distinguidas se encuentran los métodos exactos (Redes bayesianas, Diagramas de influencia...) y los aproximados (Método Bayesiano subjetivo, Factores de certeza...).

Otros métodos numéricos no probabilistas, existentes, para el tratamiento de la incertidumbre como la teoría de *Dempster-Shafer* que utiliza grados de creencia dados por intervalos de valores para representar el conocimiento, es uno de los métodos numéricos no probabilistas. La lógica neutrosófica es igualmente un método de razonamiento aproximado no probabilista, que puede definirse como una extensión de la lógica multivaluada que facilita el modelado de información cualitativa de forma aproximada. Su éxito se debe principalmente a la posibilidad de resolver problemas de una gran complejidad y poco definidos que, mediante métodos tradicionales, son difíciles de solucionar.

9.1.3 ¿Qué es la Lógica Neutrosófica?

La *Lógica Neutrosofica* es una lógica multivaluada que permite representar matemáticamente la incertidumbre y la vaguedad, proporcionando herramientas formales para su tratamiento.

Como indica Zadeh [3], "*Cuando aumenta la complejidad, los enunciados precisos pierden su significado y los enunciados útiles pierden precisión.*", que puede resumirse como que *"los árboles no te dejan ver el bosque"*. Básicamente, cualquier problema del mundo puede resolverse como; dado un conjunto de variables de entrada (espacio de entrada), obtener un valor adecuado de variables de salida (espacio de salida). La lógica neutrosófica permite establecer este *mapeo* de una forma adecua- da, atendiendo a criterios de significado (y no de precisión).

El término *Lógica Neutrosófica*, en la actualidad se utiliza en un amplio sentido, agrupando la teoría de los conjuntos, en particular de los conjuntos neutrosóficos, basado en reglas, de tipo si - entonces, de tipo aritmético y de cuantificadores.

9.1.4 Lógica Neutrosófica. Diferencias con Probabilidad

Los conceptos empleados en Lógica Neutrosófica y Probabilidad están relacionados en cierto modo, pero son totalmente diferentes. De forma resumida, la probabilidad representa información sobre frecuencia de ocurrencias relativas de un evento bien definido sobre el total de eventos posible. Por su parte, el grado de pertenencia neutrosófico representa las similitudes de un evento con respecto a otro evento, donde las propiedades de esos eventos no están definidas de forma precisa.

En el ejemplo, de superviviente de un accidente de avión que se encuentra en medio del desierto. Hace dos días que está caminando sin agua en busca de algún poblado cercano donde puedan socorrerle. De repente encuentra dos botellas de líquido, etiquetadas como se muestra en la ilustración 200. La botella A neutrosófica está etiquetada como que contiene líquido potable con un grado de pertenencia 0.8, mientras que la botella B probabilista está etiquetada como que contiene con probabilidad 0.8 un líquido potable. ¿Cuál debería elegir el superviviente?

Ilustración 200

La botella A indica que el líquido que contiene es bastante similar a otros que son potables. Este valor numérico depende de la función de pertenencia asociada al concepto de "líquido potable". Supongamos que la función de pertenencia asocia es igual 1 al agua pura, por lo que un valor de 0.8 indicaría que la botella A contiene agua no totalmente pura, pero todavía potable (o al menos no es algún líquido perjudicial para el organismo).

La probabilidad asociada a la botella B indica que, tras realizar un alto número de experimentos, el contenido de la botella B es potable el 80 % de las veces. Pero, ¿qué ocurre con el otro 20 % de las veces? En estas ocasiones, el líquido no era potable y, por tanto, hay un 20 % de probabilidad de que mueras bebiendo el líquido de esa botella porque contenga alguna sustancia toxica o química perjudicial para la salud, en lugar de agua.

¿Qué debería elegir el superviviente si las botellas estuvieran etiquetadas con valores de 0,5 neutrosófico y 0,5 de probabilidad? En este caso debería rechazar A porque un grado de pertenencia de 0.5 indicaría que el contenido de la botella no es muy parecido a los líquidos potables en ese dominio de conocimiento. La botella B tendría 0.5 de probabilidad de ser potable (también es incertidumbre total), pero tendría un 50 % de probabilidad de que el líquido fuera potable, por lo que debería jugársela y elegir la botella B.

9.2 Conjuntos Neutrosóficos y Variables Lingüísticas

9.2.1 Introducción a los conjuntos Neutrosóficos

La lógica neutrosófica emplea valores continuos entre 0 (que representa hechos totalmente falsos) y 1 (totalmente ciertos). La lógica binaria clásica, puede verse como un caso particular de la lógica neutrosofica y difusa. Zadeh propuso en 1965 por primera vez la noción de Conjunto Difuso, en la actualidad este término se extiende a conjuntos neutrosóficos. Hecho que marca el principio de una nueva teoría denominada Teoría de Conjuntos Neutrosóficos.

Los conceptos que se asocian a conjuntos neutrosóficos (asocian los valores de pertenencia). Una vez que se obtienen los valores es posible trabajar con reglas lingüísticas y obtener una salida, que podrá seguir siendo neutrosófica o desneutrosofica para obtener un valor discreto.

De este modo, a diferencia de la teoría clásica de conjuntos, que se basa en el principio básico de la lógica, de forma que un individuo pertenece o no pertenece a un conjunto, la idea básica de un conjunto neutrosófico es que un elemento forma parte de un conjunto con un determinado grado de pertenencia. Una proposición no es totalmente (sino parcialmente) cierta o falsa. Este grado se expresa mediante un entero en el intervalo [0, 1]. Un ejemplo claro es la representación de la altura de una población de individuos, la cual se expresa en centímetros y en términos lingüísticos (Bajo, Medio y Alto. En la ilustración 201 se muestra en las gráficas a y b, la descripción de los conjuntos y en las gráficas c y d la descripción de las personas altas.

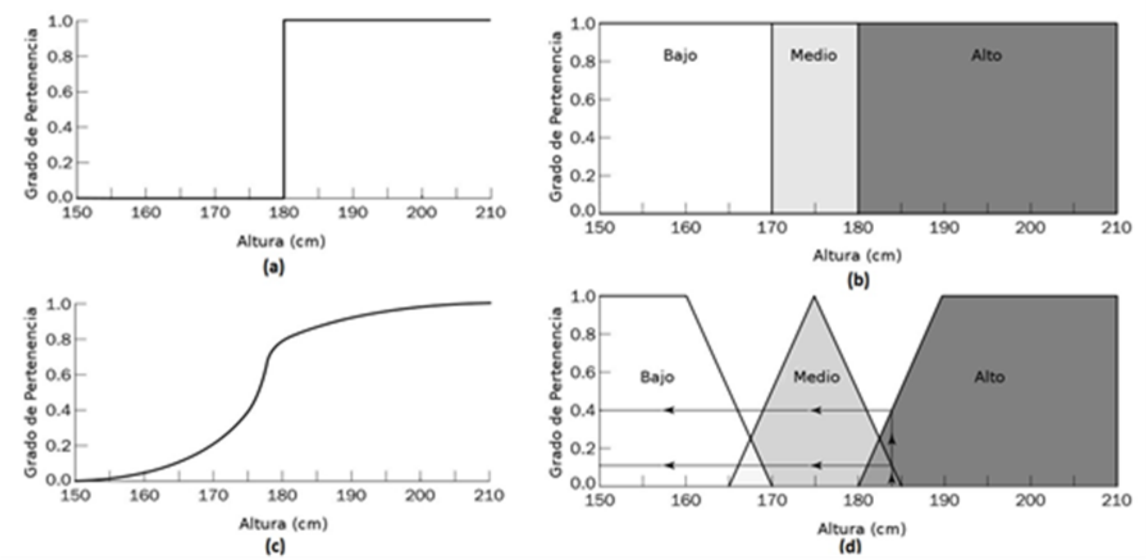


Ilustración 201

En la representación de las gráficas de la figura 4, se muestra una línea que separa claramente en 1.8 m los individuos que son altos de los que no lo son, asociando un valor de partencia estricto al conjunto de los altos de aquellos que superan esa altura. Sin embargo, el conjunto neutrosófico permite expresar que una determinada persona tiene un grado de pertenencia al conjunto de los altos en $\mu A(Altura) = 0{,}82$.

Por tanto, un conjunto neutrosófico proporciona una transición suave entre los límites de lo que son denominados conjuntos. El Universo del discurso se define como todos los posibles valores que puede tomar una determinada variable (en el caso de la imagen que se muestra en la figura 4, se correspondería con el eje horizontal de las gráficas, desde 150 a 210cm).

9.2.2 Conjuntos neutrosóficos

La teoría de conjuntos neutrosóficos constituye un intento de desarrollar una serie de conceptos para tratar de un modo sistemático el tipo de imprecisión que aparece cuando los límites de las clases de objetos no están claramente definidos. Un conjunto neutrosófico puede definirse como una clase en la que hay una progresión gradual desde la pertenencia al conjunto hasta la no pertenencia; o visto de otra forma, en la que un objeto puede tener un grado de pertenencia definido entre la pertenencia total (valor uno) o no pertenencia (valor cero). Desde esta perspectiva, los conjuntos convencionales pueden verse como un caso particular de conjuntos neutrosóficos; cuyo conjunto neutrosófico sólo admite dos grados de pertenencia (uno y cero).

Un conjunto neutrosófico puede definirse de forma general como un conjunto con límites neutrosóficos. Sea X el Universo del discurso, y sus elementos se denotan como x. En la teoría clásica de conjuntos se define un conjunto C sobre X mediante la función característica de C como fC.

$$f_C(x) = \begin{cases} 1 & cuando \quad x \in C \\ 0 & cuando \quad x \notin C \end{cases}$$

Este conjunto mapea el universo X en un conjunto de dos elementos, donde la función fC (x) es 1 si el elemento x pertenece al conjunto C y 0 si el elemento x no pertenece al conjunto C. Al generalizar esta función para que los valores asignados a los elementos del conjunto caigan en un rango particular y así indicar el grado de pertenencia de los elementos a ese conjunto, tendremos una función de pertenencia de un determinado conjunto neutrosófico. La función de pertenencia μA por la que se define un conjunto Neutrosófico A, sería la que se muestra a continuación:

$$\mu_A = X \rightarrow [0, 1]$$

$$\begin{aligned} &\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x) \\ &\mu_{A\cap B}(x) = \perp[\mu_A(x), \mu_B(x)] \\ &\mu_{A\cup B}(x) = T\,[\mu_A(x), \mu_B(x)] \end{aligned}$$

Donde; $\mu A(x) = 1$ si x está totalmente en A, $\mu A(x) = 0$ si x no está en A y $0 < \mu A(x) < 1$ si x está parcialmente en A. Este valor entre 0 y 1 representa el grado de pertenencia (también llamado valor de pertenencia de un elemento x a un conjunto A.

Así, el intervalo de la ecuación 3 es de números reales e incluye los extremos. Aunque [0, 1] es el rango de valores más utilizado para representar funciones de pertenencia, cualquier conjunto arbitrario con alguna ordenación total o parcial podría ser utilizado. La descripción gráfica de operadores estándar con conjuntos neutrosóficos es la que se muestra en la ilustración 202.

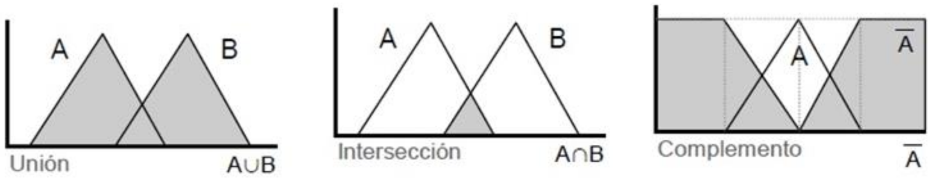


Ilustración 202

9.2.3 Operaciones de Conjuntos Neutrosóficos

Las tres operaciones básicas que se definen sobre conjuntos (complemento, unión e intersección), pueden generalizarse de varias formas en conjuntos neutrosóficos. No obstante, existe una generalización particular que tiene especial importancia. Cuando se restringe el rango de pertenencia al conjunto [0, 1], estas operaciones" estándar" sobre conjuntos neutrosóficos se comportan de igual modo que las operaciones sobre los conjuntos. Dichas operaciones se definen del siguiente modo (Ilustración 202).

- **Unión**

La forma generalizada de la unión es la T-conorma. Ella se define con la siguiente función:

$$\perp : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$$
$$\mu A \cup B(x) = \perp [\mu A(x), \mu B(x)]$$

Para que una función se pueda considerar como una unión neutrosófica, debe satisfacer los siguientes axiomas $\forall a,b,c \in [0,1]$:

- U1) Elemento Neutro: $\perp(a,0) = a$
- U2) Conmutatividad: $\perp(a,b) = \perp(b,a)$
- U3) Monotonicidad: Si $a \le c$ y $b \le d$ entonces $\perp(a,b) = \perp(c,d)$
- U4) Asociatividad: $\perp(\perp(a,b),c) = \perp(a,\perp(b,c))$

Algunas T-conormas ampliamente utilizadas son:

- Máximo: ⊥(a, b) = max(a, b)
- Prducto: ⊥(a, b) = (a + b) − (a × b)
- Suma limitada (o de Lukasiewick): ⊥(a, b) = min(a + b, 1)

- **Intersección**

La forma generalizada de la intersección se denomina T-norma. Es una función de la forma:

$$T: \ [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$$
$$\mu A \cap B\ (x) = T\ [\mu A(x), \mu B\ (x)]$$

Una T-norma satisface los siguientes axiomas $\forall a,b,c \in [0,1]$

- I1) Elemento unidad: $T\ (a,1) = a$
- I2) Conmutatividad: $T\ (a,b) = T\ (b,a)$

- I3) Monotonicidad: Si $a \leq c$ y $b \leq d$ entonces $T(a,b) = T(c,d)$
- I4) Asociatividad: $T(T(a,b),c) = T(a,T(b,c))$

Algunas T-normas ampliamente utilizadas son:

- Mínimo: $T(a,b) = min(a,b)$
- Producto algebraico: $T(a,b) = ab$
- Diferencia limitada (o de Lukasiewick): $T(a,b) = max(0, a + b - 1)$

- **Complemento**

El complemento $\bar{A}$ de un conjunto neutrosófico A, se denota por cA; está definido por una función del tipo $c: [0,1] \rightarrow [0,1]$. Tiene que satisfacer los siguientes axiomas:

- C1) Condiciones límite o frontera: $c(0) = 1$ y $c(1) = 0$.
- C2) Monotonicidad: $\forall a, b \in [0,1]$ si $a < b$ entonces $c(a) \geq c(b)$. C3) c es una función continua.
- C4) c es involutiva $\forall a \in [0,1]$ tenemos $c(c(a)) = a$.

Al igual que sucedía con los operadores de unión y de intersección, también para el complemento existen gran variedad de clases. Uno de los más utilizados, además del complemento clásico ($\mu_A(x) = c(a) = 1 - a$), es el λ-complemento de Sugeno, que viene definido por la siguiente expresión.

$$\mu_{\overline{A^{\lambda}}}(x) = \frac{1 - \mu_A(x)}{1 + \lambda \mu_A(x)} \quad con \ \ \lambda \in (-1, \infty)$$

Como se puede observar, si $\lambda = 0$, la función se comporta como el complemento clásico. Además, para cada valor de λ, obtenemos una expresión particular para el complemento. Otro tipo de complemento muy utilizado es el de Yager, que se define a través de la siguiente expresión.

$$\mu_{\overline{A^{w}}}(x) = (1 - \mu_A(x)^w)^{1/w} \quad con \ \ w \in (0, \infty)$$

Al igual que con el complemento de Sugeno, cambiando el valor de w se obtienen distintos

tipos de complemento. Si w = 1 tenemos el complemento clásico. En la ilustración 203 se muestra el uso del modificador muy en los conjuntos bajo y alto, lo que origina un nuevo complemento.

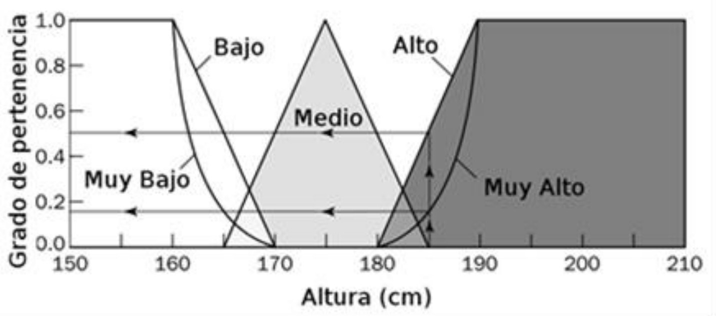


Ilustración 203

9.2.4 Propiedades de los Conjuntos Neutrosóficos

Los conjuntos de forma general y los neutrosóficos, de forma particular, tienen las mismas propiedades (en realidad los conjuntos pueden verse como un subconjunto de los conjuntos neutrosóficos) con las siguientes propiedades:

- **Conmutativa**: $A \cap B = B \cap A$
- **Asociativa**: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- **Distributiva**: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- **Idempotencia**: $A \cup A = A$ y $A \cap A = A$
- **Involución**: $\neg(\neg A) = A$
- **Transitiva**: *Si* $(A \subset B) \cap (B \subset C)$ *entonces* $A \subset C$ 1
- **Leyes de Morgan**: $\neg (A \cap B) = \neg A \cup \neg B$ y $\neg(A \cup B) = \neg A \cap \neg B$

Con el uso de estas propiedades, se obtiene una cierta variedad de expresiones. Por ejemplo, siendo A el conjunto *alto* y B *bajo*, podemos derivar el conjunto C como *no muy alto y no muy bajo* como $\mu_C(x) = [1 - \mu_a(x)^2] \cap [1 - \mu_B(x)^2]$.

9.2.5 Representación de conjuntos neutrosóficos

Los conjuntos son útiles, pero presentan problemas en muchas situaciones. Examinando el *Universo del discurso* de la altura, tendríamos la representación gráfica de la Figura 6. Para definir un conjunto neutrosófico hay que definir su *función de pertenencia*. Un método habitual es preguntar a un experto sobre el dominio del problema y representarlo mediante diferentes funciones (típicamente triangulares y trapezoidales). También se pueden utilizar,

funciones curvas o la función singleton.

Para representar un conjunto difuso continuo en una computadora es necesario expresar esa función de pertenencia y mapear los elementos del conjunto con su grado de pertenencia. Aunque puede usarse a priori cualquier tipo de función, en la práctica se emplean *funciones lineales* con una descripción de su **vector de ajuste**, como:

$$\textit{hombre-medio} = (0/165, 1/175, 0/185)$$

Esta representación se corresponde con el conjunto difuso *Medio* de la Figura 6, donde para la altura 165 se asocia el grado de pertenencia 0, a la altura 175 el grado de pertenencia 1, y de nuevo a la altura 185 el grado de pertenencia 0.

9.3 Variables Lingüísticas

Para representar el conocimiento en razonamiento aproximado es necesario el uso de variables lingüísticas. Una variable lingüística es aquella cuyos valores son palabras o sentencias en un lenguaje natural o artificial. De esta forma, una variable lingüística sirve para representar cualquier elemento que sea demasiado complejo, o del cual no tengamos una definición concreta; es decir, lo que no podemos describir en términos numéricos. Una variable lingüística está caracterizada por una quíntupla tal y como se muestra en la siguiente expresión.

$$(X, T\ (X), U, G, M\ )$$

Donde:

- X es el nombre de la variable.
- $T(X)$ es el conjunto de términos de X; es decir, la colección de sus valores lingüísticos (o etiquetas lingüísticas).
- U es el universo del discurso (o dominio subyacente). Por ejemplo, si la hablamos de temperatura "Cálida" o "Aproximadamente 25^{o}", el dominio subyacente es un dominio numérico (los grados centígrados).
- G es una gramática libre de contexto mediante la que se gene- ran los términos en $T(X)$, como podrían ser "muy alto", "no muy bajo", ...
- M es una regla semántica que asocia a cada valor lingüístico de X su significado $M(X)$ (M (X) denota un subconjunto difuso en U).

- **Términos primarios**:" bajo"," alto", ...
- **Modificadores**:" Muy"," más"," menos"," cerca de", ...

- **Conectores lógicos**: Normalmente NOT, AND y OR.

Normalmente se definen los conjuntos neutrosóficos de los términos primarios y, a partir de éstos, es que se calculan los conjuntos neutrosóficos de los términos compuestos (por ejemplo, con “muy” y “alto” construimos el término compuesto “muy alto”). Una etiqueta lingüística se forma como una sucesión de los símbolos terminales de la gramática: “Muy alto, no muy bajo...”.

Un uso habitual de las variables lingüísticas es en reglas difusas. Ejemplo: *Si duración - examen es larga entonces la probabilidad - aprobar es* pequeño. Por ejemplo, la variable lingüística *velocidad* podrías incluir conjuntos neutrosóficos como *muy lento, lento, medio, rápido, muy - rápido*. Naturalmente cada uno de estos conjuntos representan un valor lingüístico que puede tomar la variable.

Normalmente se definen los conjuntos neutrosóficos de los términos primarios y, a partir de éstos, es que se calculan los conjuntos neutrosóficos de los términos compuestos (por ejemplo, con “muy” y “alto” construimos el término compuesto “muy alto”). Una etiqueta lingüística se forma como una sucesión de los símbolos terminales de la gramática: “Muy alto, no muy bajo...”.

Un uso habitual de las variables lingüísticas es en reglas difusas. Ejemplo: Si duración - examen es larga entonces la probabilidad - aprobar es pequeño. Por ejemplo, la variable lingüística velocidad podrías incluir conjuntos neutrosóficos como muy lento, lento, medio, rápido, muy - rápido. Naturalmente cada uno de estos conjuntos representan un valor lingüístico que puede tomar la variable.

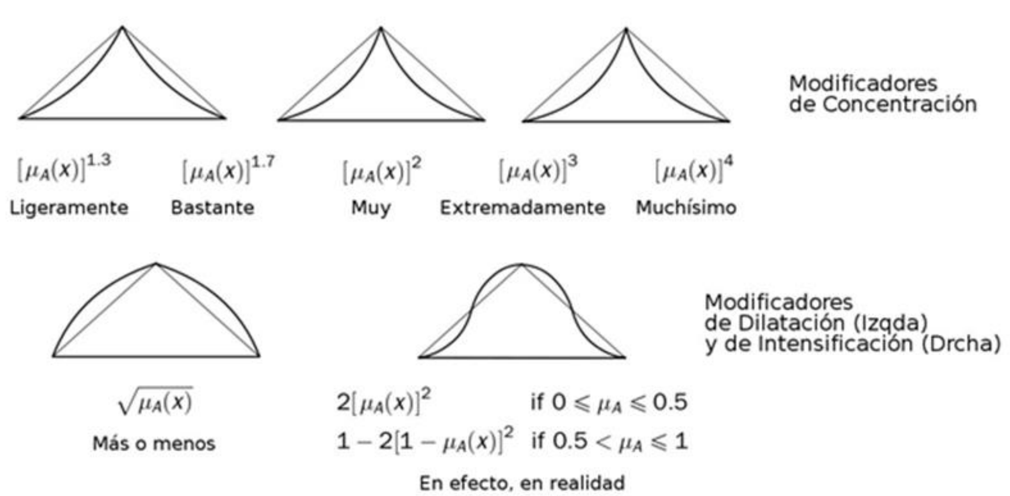


Ilustración 204

9.3.1 Modificadores

Una variable lingüística puede emplear modificadores para cambiar la forma de los conjuntos neutrosóficos. Estos modificadores pueden asociarse a adverbios como "muy", "ligeramente", "un poco", etc... Estos modificadores pueden aplicarse a oraciones completas, verbos, adjetivos, etc.

La ilustración 204 muestra un ejemplo de uso de modificadores (en este caso el modificador muy). En el ejemplo de esta figura, Carlos, un elemento del conjunto "alto" (con un grado de pertenencia de 0.5) es también miembro del conjunto de los "muy altos" (pero con un grado de pertenencia de 0.15, lo cual es razonable).

¿Cómo se implementan estos modificadores? En la práctica, podemos distinguir tres tipos de modificadores; de concentración, de dilatación y de intensificación. En la ilustración 204 se representan algunos de los modificadores más empleados. Por ejemplo, si Pedro tiene un valor de pertenencia de 0.86 al conjunto de los altos, tendrá un valor de: al conjunto de los más o menos altos.

9.4 Razonamiento Aproximado

Mediante el uso de conjuntos neutrosóficos es posible dotar de significado matemático a proposiciones como" este coche es pequeño"," Pedro es muy alto" o" el crecimiento es lento" utilizando los modificadores lingüísticos (muy, poco, demasiado, algo, extremadamente, etc.) para adaptar los calificativos a lo que se quiere decir. Así para la representación y utilización del conocimiento impreciso, aparece el concepto de variable lingüística.

Muchas veces, la programación clásica no es suficiente para que un sistema realice funciones complejas. Cuando un sistema no ha sido programado explícitamente para realizar una función y se le pide que la realice, el sistema tiene que razonar. Por ejemplo, si el sistema conoce los siguientes hechos:" Estirada es una jirafa"," Las jirafas son mamíferos" y le formulamos la pregunta:" ¿Es Estirada un mamífero?", el sistema debe razonar para dar una respuesta. Cuando el número de hechos y reglas aumenta, el sistema tiene que poder verificar gran cantidad de hechos que surgen en las etapas de razonamiento. A continuación, estudiaremos el concepto de *Regla Neutrosófica* empleada en *Razonamiento Aproximado*.

9.5 Reglas Neutrosófica

El razonamiento aproximado se utiliza para representar y razonar con conocimiento expresado en forma de primitivas atómicas (Ilustración 205), enunciadas en lenguaje natural. Por ejemplo "La velocidad tiene un valor positivo grande".

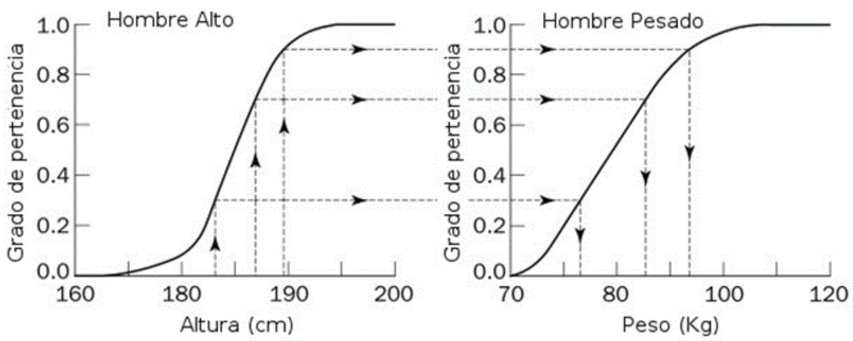


Ilustración 205

La transformación de esta expresión en lenguaje natural, en términos de variables lingüísticas se realiza como se indica a continuación:

1. Se selecciona un símbolo V para representar la variable física "velocidad".
2. Se elige un símbolo PG para representar el valor particular "*positivo grande*" de la variable física "*velocidad*".
3. La expresión en lenguaje natural pasa a ser: V es PG

A este tipo de expresión se le denomina proposición atómica neutrosófica. La interpretación de la expresión atómica anterior viene dada por la pertenencia de la variable física velocidad V al conjunto difuso PG, es decir μP G(ν), donde ν denota un valor arbitrario del universo del discurso U. Esta interpretación determina el grado en que la expresión es satisfecha dado un valor específico de la variable V.

Usando este concepto de proposición neutrosófica y conectores lingüísticos con "y", "o" y "no" es posible componer proposiciones difusas más complejas "A es X y B es Y", "A es no X", etc... El significado de estas proposiciones difusas compuestas viene dado por la interpretación de los conectores lingüísticos.

Esta interpretación se hace en base a las operaciones de intersección, unión y complemento que, como se vio anteriormente, se realiza mediante T-normas, T- co normas y el operador complemento elegido. Hay que tener en cuenta que, el grado de satisfacción de una expresión constituye un conjunto difuso y, por tanto, estos conectores deben interpretarse mediante operadores de conjuntos neutrosóficos.

Una regla neutrosófica (regla de producción neutrosófica if - then) es expresada simbólicamente como:

$$IF\ < proposición\ neutrosófica\ >\ THEN\ < proposición\ neutrosófica >$$

Donde <proposición neutrosófica> puede ser una proposición difusa atómica o compuesta. Podemos definir una proposición sencilla de este tipo mediante:

$$p: IF\ X\ es\ A\ THEN\ Y\ es\ B$$

El antecedente y consecuente de una regla puede tener múltiples partes. Veremos a continuación cómo se trabaja con estos formatos de reglas.

En los sistemas de reglas clásicos, si el antecedente es cierto, el consecuente es también cierto. En sistemas neutrosóficos donde el antecedente es neutrosófico, todas las reglas se ejecutan parcialmente, y el consecuente es cierto en cierto grado (si el antecedente es cierto con cierto grado de pertenencia, el consecuente es cierto también el cierto grado).

En el ejemplo de la regla "*IF altura IS alto THEN peso IS pesado*. El valor de la salida (grado de pertenencia) puede ser estimado directamente empleando un método de inferencia de selección monotónica. En la figura se pueden ver cómo varios valores de peso pueden ser derivados de diferentes valores de alturas.

9.6 Inferencia Neutrosófica

La inferencia neutrosófica puede definirse como el proceso de obtener un valor de salida para un valor de entrada empleando la teoría de conjuntos neutrosóficos. A continuación, veremos dos tipos de inferencia: la inferencia de Mamdani y la inferencia de TSK (Takagi, Sugeno y Kang).

9.6.1 Inferencia de Mamdani

Es posiblemente el método más ampliamente utilizado, propuesto por Ebrahim Mamdani en 1975. El proceso de inferencia a través de Mamdami se realiza en cuatro pasos:

1. Fuzificación de las variables de entrada.
2. Evaluación de las reglas.
3. Agregación de las salidas de las reglas.
4. Defuzificación.

A continuación, se explica un ejemplo de uso empleando tres reglas. Estas reglas usan como variables lingüísticas x (financiación del proyecto), y (plantilla del proyecto) y z (riesgo). Los conjuntos de- finidos sobre el dominio de X son $A1, A2, A3$ (inadecuado, marginal, adecuado), sobre el dominio de Y $B1, B2$ (pequeña, grande) y sobre el universo del discurso de Z son $C1, C2yC3$ (bajo, normal y alto).

- **Reglas**:

R1: $IF\ x\ is\ A3\ OR\ y\ is\ B1\ THEN\ z\ is\ C1$

R2: $IF\ x\ is\ A2\ AND\ y\ is\ B2\ THEN\ z\ is\ C2$

R3: $IF\ x\ is\ A1\ THEN\ z\ is\ C3$

A continuación, se describen las etapas de la inferencia de Mamdani

1. **Etapa de Fuzificación**. El primer paso consiste en tomar los valores de las entradas y determinar el grado de pertenencia de estas entradas a los conjuntos neutrosóficos asociados.

   El valor naturalmente estará limitado en el universo del discurso de la variable. En nuestro caso, x e y estarán limitadas al universo del discurso de X e Y respectivamente. Suponiendo que un experto asigna a x un valor del 35 % y a y un valor de 60 %. Como se puede ver estos valores que se corresponden con los valores de pertenecía de A1 y A2 (en el caso de x) con 0.5 y 0.2, y con los valores de B1 y B2 (en el caso de y) con 0.1 y 0.7 respectivamente. De este modo cada entrada es neutrosóficada sobre *todas* las funciones de pertenencia utilizadas en las reglas neutrosóficas.

2. **Etapa de Evaluación de Reglas,** Basado en las entradas anteriores y se aplican a los antecedentes de las reglas Neutrosóficas. Si una regla tiene múltiples antecedentes, se utiliza el operador AND u OR para obtener un único número que represente el resultado de la evaluación. Este número (el valor de verdad) se aplica al consecuente.

   Para evaluar la disyunción (operador OR) habitualmente se emplea la T-Conorma estándar (máximo), definida como: µA∪B (x) = m´ax [µA(x), µB (x)]. De igual forma, para el AND se usa habitualmente la T-Norma estándar del mínimo.

   Finalmente, el resultado de la evaluación del antecedente se aplica al consecuente, aplicando un recorte o escalado según el valor de verdad del antecedente. El escalado proporciona un valor más preciso, preservando la forma original del conjunto difuso. Se

obtiene multiplicando todos los valores por el valor de verdad del antecedente (ilustración 206).

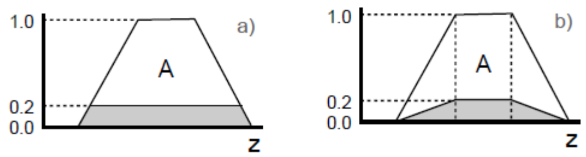


Ilustración 206

3. **Agregación de las salidas** La agregación es el proceso de unificación de las salidas de todas las reglas; es decir, se combinan las funciones de pertenencia de todos los consecuentes previamente recortados o escalados, combinando para obtener un único conjunto difuso por cada variable de salida.

4. **Defuzificación** El resultado final habitualmente es necesario expresarlo mediante un valor conjunto. En esta etapa se toma como entrada el conjunto neutrosófico previamente obtenido para dar un valor de salida. Existen varios métodos de desneutrosoficación, pero probablemente el más ampliamente usado es el **centroide**; que calcula el punto donde una línea vertical divide el conjunto en dos áreas con igual masa, para el cálculo del cancroide se utiliza la siguiente ecuación:

$$W_A = \frac{\sum(\mu(k_i) \times k_i)}{\sum \mu(k_i)}$$

9.6.2 Inferencia TSK

El modelo de inferencia de Mamdani require de algún tipo de método para la desneutrosoficación. En general, este método no es muy eficiente desde el punto de vista computacional. Podemos disminuye el tiempo de inferencia empleando una función matemática en el consecuente, de forma que el formato general de regla en inferencia TSK es:

$$p: IF\ x\ es\ A\ AND\ y\ es\ B\ THEN\ z\ es\ f\ (x, y)$$

Este tipo de método proporciona mayor eficiencia, pero no presenta un marco tan natural para la representación del conocimiento humano. Un tipo habitual de representación del consecuente es un singleton (punta discreta), que toma valor uno en un valor puntual del universo del discurso y cero en cualquier otro punto.

Empleando este tipo de aproximación (ampliamente utilizada), la inferencia TSK y de Mamdani son muy parecidas, tomando las reglas el siguiente formato:

$$p\colon IF\ x\ es\ A\ AND\ y\ es\ B\ THEN\ z\ es\ k$$

Siendo k un valor constante para el singleton. La salida de los datos en este caso se obtiene mediante una sencilla agregación (media de pesos WA, según la ecuación que se muestra a continuación) de estos singletones.

$$Centroide = \frac{\sum_{x=a}^{b} \mu_A(x)x}{\sum_{x=a}^{b} \mu_A(x)}$$

En general el método de Mamdani se utiliza con mayor frecuencia porque apareció antes, y porque se presta más a la representación del conocimiento de experto. Permite describir el conocimiento experto de forma intuitiva. El principal inconveniente es su alto costo computacional, por lo que para aplicaciones de control y problemas de optimización se emplea más frecuentemente el método de inferencia TSK.

9.7 Ejercicios

9.7.1 Control del Péndulo Invertido

El problema es mantener equilibrada una barra rígida sobre una plataforma móvil que puede desplazarse en dos direcciones; izquierda y derecha. Queremos diseñar un controlador difuso que tomará como entradas el ángulo y la velocidad angular y dará como salida la velocidad de la plataforma, (ilustración 207).

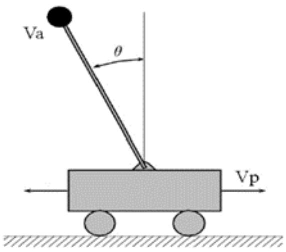


Ilustración 207

Para dar solución al ejercicio, el primer paso es definir las etiquetas de la variable lingüística **velocidad** de la plataforma. En este caso definiremos 5 etiquetas asociadas a sus respectivos conjuntos neutrosóficos como **NG** (Negativa Grande) **NP** (Negativa Pequeña) **Z** (Cero) **PP** (Positiva Pequeño) y **PG** (Positiva Grande).

1) $Velocidad\, NG = (1/-3, 1/-2, 0/-1)$
2) $Velocidad\, NP = (0/-2, 1/-1, 0/0)$
3) $Velocidad\, Z = (0/-1, 1/0, 0/1)$
4) $Velocidad\, PP = (0/0, 1/1, 0/2)$
5) $Velocidad\, PG = (0/1, 1/2, 1/3)$

La Velocidad de la plataforma se define empleando la misma notación de las funciones de pertenencia para el **ángulo** y la **velocidad angular**, que tienen asociados los siguientes vectores de ajuste:

1) $Ángulo\, NG = (1/-45, 1/-30, 0/-15)$
2) $Ángulo\, NP = (0/-30, 1/-15, 0/0)$
3) $Ángulo\, Z = (0/-15, 1/0, 0/15)$
4) $Ángulo\, PP = (0/0, 1/15, 0/30)$
5) $Ángulo\, PG = (0/15, 1/30, 1/45)$

1)	$Velocidad\,Angular\,NG = (1/-1{,}5, 1/-1, 0/-0{,}5)$
2)	$Velocidad\,Angular\,NP = (0/-1, 1/-0{,}5, 0/0)$
3)	$Velocidad\,Angular\,Z = (0/-0{,}5, 1/0, 0/0{,}5)$
4)	$Velocidad\,Angular\,PP = (0/0, 1/0{,}5, 0/1)$
5)	$Velocidad\,Angular\,PG = (0/0{,}5, 1/1, 1/1{,}5)$

La base de reglas del controlador se representa en una tabla (ver tabla 9.1) llamada *memoria asociativa neutrosófica*

Tabla 9.1. Base de reglas del controlador neutrosófico

VelAng/Ang	NG	NP	Z	PP	PG
NG			NG		
NP			NP	Z	
ZPP	NG	NPZ	Z PP2	PP	PG
PG			PG		

La interpretación de algunas las reglas mostradas en la tabla 9.1 quedan:

- **Para la regla 2:**

Si (*Ángulo* es Zero) y (*Velocidad Angular* es Positiva Pequeña) Entonces (*Velocidad de Plataforma* será Positiva Pequeña).

La regla anterior significa que, aunque el péndulo está en la posición correcta, se está moviendo lentamente en sentido positivo, por lo que se hace necesario mover la plataforma lentamente en la misma dirección para compensar este movimiento.

Suponiendo los siguientes valores de entrada **Ángulo=3.75**, Velocidad **Angular=-0.3**.

1) ¿Qué velocidad se le aplicaría a la plataforma empleando inferencia de Mamdani y el centroide como método de defuzzificación?

9.7.2 Propina al mesonero

El conocimiento experto de un comensal de un restaurante se modela mediante un sistema de reglas neutrosóficos. El sistema cuenta con dos variables de entrada **Servicio** (Calidad del Servicio, que se evalúa de 0 a 10), y **Comida** (Calidad de la Comida, que se evalúa igualmente de 0 a 10). El porcentaje de propina se modela con la variable **Propina** (definida entre 5% y 25% del precio total).

A la variable de entrada *Servicio* le asociaremos tres conjuntos neutrosóficos asociados a las etiquetas lingüísticas *Pobre*, *Bueno* y *Excelente*. Estos conjuntos se definirán empleando una función *Gaussiana Simple*, con la siguiente especificación:

$Pobre = m = 0, \sigma = 1{,}5$ $Bueno = m = 5, \sigma = 1{,}5$ $Excelente = m = 10, \sigma = 1{,}5$

La calidad de la comida ***Comida*** tendrá asociada dos conjuntos neutrosóficos, con las etiquetas *Rancia* y *Deliciosa*. Estos conjuntos se definirán mediante funciones trapezoidales, con la siguiente especificación según sus vectores de ajuste:

$$Rancia = (1/0, 1/1, 0/3)$$
$$Deliciosa = (0/7, 1/9, 1/10)$$

De forma análoga, la *Propina* estará definida sobre tres conjuntos neutrosóficos con las etiquetas *Tacaña*, *Promedio* y *Generosa*. Estos conjuntos se definirán mediante funciones triangulares, con la siguiente especificación según sus vectores de ajuste:

$Tacaña = (0/0, 1/5, 0/10)$ $Promedio = (0/5,$
$1/15, 0/25)$ $Generosa = (0/20, 1/25, 0/30)$

El sistema de reglas que modela el conocimiento experto del comensal está basado en tres reglas, con la siguiente especificación:

- $\boldsymbol{R}_1$: Si *servicio* es *pobre* ∨ *comida* es *rancia* → *propina* es *tacaña*
- $\boldsymbol{R}_2$: Si *servicio* es *bueno* → *propina* es *promedio*
- $\boldsymbol{R}_3$: Si *serv.* es *excel.* ∨ *comida* es *deliciosa* → *propina* es *generosa*

1) Dada una calificación de *Servicio=3* y *Comida=8*, calcule la propina para el camarero

empleando:

a. Un modelo de Inferencia de Mamdani, empleando el centroide como mecanismo de deborrosificación.
b. Un modelo de Inferencia TSK, empleando singletones definidos en el valor máximo de cada conjunto de salida y la media de los pesos como mecanismo de agregación de los consecuentes.

9.8 Ejemplos de indeterminación

La idea de extender el principio neutrosófico, que se basa en la indeterminación, a la probabilidad, llegó desde le clásico ejercicio de la tirada de un dado sobre superficies irregulares.

Ejemplo 1.

En un espacio muestral, al lanzar un dado cúbico (con 12 aristas y 8 vértices) sobre una superficie irregular se desea conocer cuál es la posibilidad de que el dado caiga en un vértice o en una arista, de una pequeña rendija o grieta.

Para obtener el resultado de la indeterminación presente con el lanzamiento del dado, se analiza la probabilidad neutrosófica NPT de lanzar el dado, teniendo en cuenta que esta probabilidad neutrosófica {1} es menor que 1/6, puesto que hay siete posibles resultados NP_T (1) < 1/6, resultado que no se comporta como el clásico resultado probabilístico donde P (1) = 1/6. Por otra parte, se debe tener en cuenta que mientras más irregularidades existen en la superficie, más indeterminación se producen.

Ejemplo 2.

Consideremos un dado en una superficie regular (con seis caras), al tener dos caras cuya impresión se borra (digamos caras 5 y 6). Entonces:

$$\mathcal{NP}(1) = \mathcal{NP}(2) = \mathcal{NP}(3) = \mathcal{NP}(4) = \frac{1}{6},$$
$$\mathcal{NP}(5) = \mathcal{NP}(6) = 0,$$

Mientras:

$\mathcal{NP}(indeterm) = \frac{2}{6}$, cuando el dado se lanza sobre una superficie regular.

Ejemplo 3.

En una superficie con grietas existe la posibilidad de que, al lanzar una moneda, la moneda cae en una grieta y se atasca en su borde; entonces tenemos de nuevo la indeterminación.

$NP(cabeza) = NP\ (Borde) < 1/2$

Y el espacio muestral es {Grieta, Borde, indeterminación}.

Ejemplo 4.

Cuando en una urna con dos tipos de votos: A y B, donde algunos votos fueron deteriorados, y no se pueden determinar si se corresponde con los votos A o B, existen votos indeterminados. Es decir, no se puede conocer el número exacto de votos indeterminados, de las boletas representadas por A o por B, en estos casos la indeterminación es mucho más grande.

Ejemplo 5.

Si existen dos candidatos A y B para la presidencia, y la probabilidad de que A gane es de 0,46, no
significa que la probabilidad de que B gane es de 0.54, ya que puede haber votos en blanco (de los votantes no elegir cualquier candidato) o votos negros (de los votantes que rechazan a ambos candidatos).

Por ejemplo, la probabilidad de que B gane podría ser 0.45, mientras que la diferencia 1-0.46-0.45 = 0.09 sería ser la probabilidad de votos en blanco y negro juntos. Por lo tanto, tenemos una probabilidad neutrosófica: *NP (A)* = (0.46.0.09.0.045)

Ejemplo 6.

Si un centro de meteorología informa que la posibilidad de la lluvia de mañana es del 60%, no significa que la probabilidad de no llover es del 40%, ya que puede haber parámetros ocultos (factores climáticos) que el centro de meteorología no es consciente de que puede haber un clima poco claro, por ejemplo, día nublado y húmedo, que algunas personas pueden interpretar, como día lluvioso y otros como día no lluvioso, la ambigüedad despierta

indeterminación.

Ejemplo 7.

Si algunas pruebas de drogas son confiables en un 95%, no significa que el 5% son poco fiables, porque no podría haber algunos efectos desconocidos de las drogas que no estamos seguros de que sean beneficiosos o perjudiciales.

Ejemplo 8.

Una ruleta tiene 38 números. Se utilizan de ellos demasiado, porque varios de sus números han ha sido borrado, y no se pueden leer de forma adecuada, por lo tanto, en este caso existe presente una indeterminación.

Ejemplo 9.

Una baraja de 52 cartas tiene 3 cartas dañadas que no pueden ser leídas, entonces existe en este caso una indeterminación. Si las tarjetas dañadas están rotas, no poseen equiprobabilidad.

Ejemplo 10.

Probabilidad en un partido de fútbol.
La probabilidad clásica es incompleta, porque calcula para un equipo la posibilidad de ganar, o la posibilidad de no ganar, no de las tres oportunidades como en probabilidad neutrosófica: ganar, tener el juego empatado, o perdiendo.

9.9 Ejemplo de indeterminación con variables neutrosóficas continuas y variables aleatorias

En los ejemplos anteriores se utilizaron variables neutrosóficos discretas y variables aleatorias. Consideremos ahora una ruleta como se muestra en la ilustración 208.

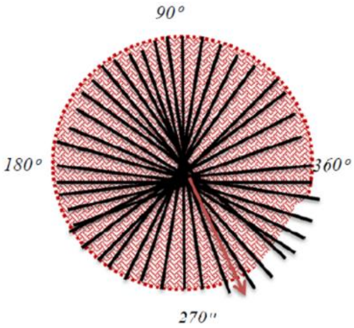


Ilustración 208

El espacio muestral continuo de la ruleta mostrada en la figura 13, es Ω = [0,360]. Si el espacio muestral que se encuentra en el 4 cuadrante y que posee los valores entre 270o - 360º, no pueden ser leídos al estar borrados algunos de estos elementos, se considera, entonces, que la ruleta posee una indeterminación. Por lo tanto, *NP (indeterm) = ¼,* lo que representa una variable aleatoria continua y la misma se calcula como se muestra la siguiente ecuación.

$$\mathcal{NP}([90,100]) = \left(ch([90,100]), ch(indeterm), ch\left(\overline{[90,100]}\right)\right)$$
$$= \left(\frac{10}{360}, \frac{90}{360}, \frac{260}{360}\right)$$

9.9.1 Primeros tipos de indeterminaciones

Los primeros tipos de indeterminaciones son:

a. Indeterminación debido al espacio (por ejemplo, la superficie sobre la que se encuentran los dados lanzados, la urna sobre la que se encuentran los votos introducido, etc.).
b. Indeterminación debido a los elementos contenidos en el espacio físico (por ejemplo, el defecto de las boletas no claras, etc.).

9.9.2 Segundos tipos de indeterminaciones

a. **Indeterminación no relacionada con un evento particular**, la que se corresponde con una constante de indeterminación; por ejemplo, al tirar un dado en una superficie regular e irregular que tiene grietas. No importa qué resultado busquemos 1, 2, ..., o 6, la indeterminación (probabilidad de que el dado caiga en una grieta y tenga una lectura

incierta) es la misma.

b. **Indeterminación relacionada con diferentes eventos**, por ejemplo, si el espacio muestral es: **{día soleado, día lluvioso, día nevado}** el pronóstico del tiempo es considerado indeterminado según el espacio muestral. Un meteorólogo calcula aproximadamente la probabilidad de cada evento, utilizando diversos parámetros, tales como: estadísticas del tiempo pasado, variables climáticas (temperatura, humedad relativa, precipitaciones, etc.), en este sentido los resultados que se obtienen son probabilísticos (imprecisos), ellos se muestran como en la siguiente expresión.

$$\{[0.1, 0.2], [0.5, 0.7], [0.3, 0.6]\}$$

Donde:

[0.1, 0.2]; Probabilidad de día soleado
[0.5, 0.7]; Probabilidad de día lluvioso
[0.3, 0.6]; Probabilidad de día nevado

Así, tenemos diferentes indeterminaciones que están relacionados con la ocurrencia de cada evento. Neutrosóficamente, podemos escribirlo como:

$NP(día\ soleado) = 0.1 + i1,\ \ donde\ i1 \in [0.0, 0.1], NP(día\ lluvioso) = 0.5 + i2$

donde $i_2 \in [0.0, 0.2]$ *y* $NP(día\ nevado) = 0.3 + i_3$, *donde* $i_3 \in [0.0, 0.3]$ *con indeterminación* i_1, i_2, i_3.

El cálculo de la unión de los eventos NP (día soleado o nevado) se realiza como:

NP (día soleado) +NP (día nevado)
$= (0.1 + i_l) + (0.3 + i_3)$
$= (0.1 + 0.3) + (i_l + i_3)$
$= 0.4 + i_4$

Donde:
$i_4 \in [0.0, 0.1] + [0.0, 0.3] = [0.0, 0.4]$. Esto también podría ser calculado simplemente como en probabilidad imprecisa clásica como:

P (día soleado o día nevado) = [0.1, 0.2] + [0.3, 0.6] = [0.4, 0.8] = 0.4 + i_4

Donde:

$i_4 \in [0.0, 0.4]$

Del mismo modo para la intersección de eventos como:

NP (día soleado y nevado) = (0.1 + i_1) · (0.3 + i_3) = (0.1) (0.3) + {0.3i_1 + 0.1i_3 + $i_1 i_3$}
= 0.03 + {[0.0, 0.3] + [0.0, 0.3]+ [0.0, 0.3]} = 0.03 + i_5
Donde:
$i_5 \in [0.0, 0.9]$

Esto es porque:

$$\{Indeterminación\} \cdot \{número\} = \{indeterminación\}$$

y

$$\{indeterminación\} \cdot \{indeterminación\} = \{indeterminación\}$$

Clásicamente:

$$P\ (día\ soleado\ y\ día\ de\ nevada) = [0.1, 0.2] \cdot [0.3, 0.6] = [0.03, 0.12]$$
$$= 0.03 + i5$$

Donde:

$i_5 \in [0.0, 0.09]$

Del mismo modo para la negación de eventos:

$$NP\ (no\ es\ un\ día\ soleado) = 1 - (0.1 + i1) = 1 - 0.1 - i1 = 0.9 - i1$$
$$== 0.8 + i6$$

Donde:

$i_6 \in [0.0, 0.1]$

Clásicamente:

P (no es un día soleado) = 1 - [0.1, 0.2] = [0.8, 0.9] = 0.8 - i_6

Donde:

$i_6 \in [0.0, 0.1]$.

c. **Indeterminaciones mixtas,** son para algunos eventos donde hay existe una posibilidad de indeterminación > 0, mientras que para otros eventos no existe.

Por ejemplo:

$$\{[0.1, 0.2], [0.5, 0.7], 0.3\}$$

Por lo tanto, hay indeterminación relacionada con el primer y segundo evento, pero no con el tercero.

9.10 Distinción entre indeterminación y Aleatoriedad.

La indeterminación es diferente de la aleatoriedad. La indeterminación se debe a los defectos de la construcción del espacio físico (donde puede ocurrir un evento), y / o para la construcción imperfecta de los objetos físicos involucrado en el evento, etc.

Por lo tanto, la probabilidad neutrosófica analiza ambos: los fenómenos aleatorios y la indeterminación relacionada con estos fenómenos. En consecuencia, la probabilidad neutrosófica se refiere a dos tipos de variables: variables aleatorias y variables de indeterminación, y dos tipos de procesos: proceso estocástico y proceso indeterminado respectivamente.

9.10.1 Variables aleatorias neutrosóficas.

Una variable aleatoria clásica (estocástica) está sujeta a cambios debido a la aleatoriedad, mientras que la variable aleatoria neutrosófica (estocástica) está sujeta a cambios debido a la aleatoriedad y la indeterminación. Los valores de una variable aleatoria neutrosófica representan los posibles resultados y las posibles indeterminaciones. La aleatoriedad y la indeterminación pueden ser objetivas o subjetivas. Al igual que las variables aleatorias clásicas, las variables aleatorias neutrosóficas se pueden clasificar en:

- **Discreta**, porque puede tomar un valor en una lista específica de valores exactos y un número finito de indeterminaciones.
- **Continua**, porque puede tomar un valor o una indeterminación en un intervalo, o en una

colección de intervalos.

- **Mixta**, porque puede tomar un valor o indeterminación en una lista específica de valores exactos, en un intervalo o en una colección de intervalos (mezcla de discreto y continuo).

Otra clasificación, como las variables aleatorias clásicas, para las variables aleatorias neutrosóficas puede ser:

- **Finitas**; teniendo, por supuesto, un número finito de posibles resultados y posibles indeterminaciones.
- **Infinitas**, teniendo un número infinito de posibles resultados o indeterminaciones.

Una variable aleatoria neutrosófica infinita puede ser contable o incontable. Una variable aleatoria neutrosófica X es admisible si es posible calcular la probabilidad de que el valor de X sea menor que cualquier número en particular, junto con su indeterminación correspondiente y su no probabilidad. Lo que equivale a la posibilidad de calcular la posibilidad de que el valor de X esté en cualquier rango, rango que debe asignarse a un subconjunto del espacio muestral neutrosófico vΩ.

9.10.2 Posibles Medidas Neutrosóficas y probabilísticas

Las medidas neutrosófica y la probabilidad neutrosófica es posible definirlas de muchas maneras, ya que al trabajar con aproximaciones e indeterminaciones es posible obtener dichas definiciones. Estas definiciones pueden depender de cada aplicación en particular.

9.10.3 Definición de probabilidad neutrosófica

La probabilidad neutrosófica (o probabilidad) es un caso particular de la medida neutrosófica. Es una estimación de un evento (diferente de la indeterminación) que ocurre, junto con una estimación de que puede ocurrir cierta indeterminación, y la estimación de que el evento no ocurre.

La probabilidad neutrosófica y las estadísticas neutrosóficas comenzaron en 1995, pero no se desarrollaron ni se aplicaron tanto como la lógica neutrosófica y el conjunto neutrosófico que se usan ampliamente en la actualidad. Una variable aleatoria neutrosófica es una variable

que puede tener un resultado indeterminado (incierto, ambiguo).

Un proceso aleatorio neutrosófico (estocástico) representa la evolución en el tiempo de algunos valores aleatorios neutrosóficos. Es una colección de variables aleatorias neutrosóficas.

La probabilidad clásica tiene que ver con dados, monedas, ruletas, ruletas, juegos de cartas, caminatas aleatorias, mientras que la probabilidad neutrosófica trata con objetos, variables y procesos injustos e imperfectos.

La probabilidad neutrosófica es una generalización de la probabilidad clásica porque, cuando la probabilidad de indeterminación de un proceso estocástico es cero, estas dos probabilidades coinciden.

9.11 Probabilidad neutrosófica vs. probabilidad imprecisa

En Probabilidad de imprecisión (IP), la probabilidad de un evento A, es:

$$IP\ (A)\ =\ (a, b)\ \subseteq\ [0,1]$$

Es un intervalo incluido en [0,1], no un número nítido. Por tanto, la Probabilidad Neutrosófica de que ocurra un evento A es:

$$NP\ (A)\ =\ (ch\ (A), ch\ (neutA), ch\ (antiA))\ =\ (T, I, F)$$

Pero a veces en lugar de "neutA" decimos “Indeterminación relacionada con A” y la denotamos con “indetermA”; También notamos "antiA" por Ā;

Donde:

T, I, F son subconjuntos estándar o no estándar de intervalo unitario no estándar] -0, 1+ [, y T es la posibilidad de que A ocurra, denotado ch(A); I es la posibilidad indeterminada relacionada con A, ch($indeterm_A$); y F es la posibilidad de que A no ocurra, ch(Ā).

Entonces, NP es también, una generalización de la probabilidad imprecisa. Por lo tanto, utilizando otras notaciones tenemos:

$$\mathcal{NP}(A) = \left(ch(A), ch\left(indeterm_A\right), ch\left(\overline{A}\right)\right)$$

Utilizamos las notaciones T (verdad), I (indeterminada) y F (falsedad) para ser coherentes con las de la lógica neutrosófica y el conjunto neutrosófico, ampliamente difundidos.

En el caso más general, T, I, F son subconjuntos estándar o no estándar del intervalo no estándar unitario] -0, 1+ [, para poder hacer una distinción entre evento seguro absoluto (evento seguro en todos los mundos posibles (cuyo valor de probabilidad es 1+), y evento de seguridad relativa (es decir, evento seguro en al menos un mundo, pero no en todas las palabras) cuya probabilidad es 1, donde 1 <1+).

Del mismo modo, para el evento absolutamente imposible (evento imposible en todos los mundos posibles - cuya probabilidad es - 0), y el evento relativamente imposible (es decir, evento imposible en al menos un mundo, pero no en todas las palabras - cuya probabilidad es - 0, donde - 0 <0).

$$1^{+} = 1 + \varepsilon\, y \, -0 = 0 - \varepsilon$$

Donde; ε es un número positivo muy pequeño

Para aplicaciones técnicas, usaremos solo conjuntos estándar y el intervalo de unidades estándar [0,1]. Observemos con mayúsculas los subconjuntos T, I, F y con letras minúsculas los números nítidos t, i, f. Para la probabilidad neutrosófica nítida, cuando T, I, F son solo números estándar o no estándar en] -0, 1+ [, en el caso más general uno tiene:

$$^{-}0 \leq t+i+f \leq 1^{+}$$

Considerando que los componentes del árbol t, i, f son independiente (como en la lógica neutrosófica y en el conjunto neutrosófico).

Si solo dos componentes son dependientes, mientras que el tercero es independiente de ellos, entonces;

$$^{-}0 \leq t+i+f \leq 3^{+}$$

Si los tres componentes dependen dos por dos, entonces;

$$^{-}0 \leq t+i+f \leq 2^{+}$$

Consideremos el caso estándar:

1. Si t + i + f = 1, uno tiene probabilidad completa (la aplicación más común) o probabilidad normalizada.
2. Si t + i + f <1, uno tiene una probabilidad incompleta (porque la fuente de información o el proceso estocástico es incompleto, es decir, no se conoce bien).
3. Si t + i + f> 1, uno tiene una probabilidad paraconsistente (debido a fuentes de información en conflicto que nos transmiten información contradictoria; por ejemplo, una fuente puede calcular la posibilidad de que ocurra un evento utilizando algunos criterios (parámetros que influyen en el evento), pero no es capaz de calcular la posibilidad de que el evento no ocurra, mientras que otra fuente de información independiente puede calcular la posibilidad de que el evento no ocurra utilizando diferentes criterios (diferentes parámetros), pero no puede calcular la posibilidad de que el evento ocurre.

Del mismo modo, para el cálculo de la posibilidad de Indeterminación del proceso estocástico de una tercera fuente de información independiente se utiliza la suma como se muestra en la siguiente expresión.

$$t+i+f \neq 1$$

9.12 Axiomas de Probabilidad Neutrosófica

Los axiomas de probabilidad neutrosófica son extensiones de los axiomas de Kolmogorov de la probabilidad clásica.

(vΩ, NF, NP), es un espacio de probabilidad neutrosófico, donde vΩ es un espacio de muestra neutrosófica, NF es un espacio de evento neutrosófico y NP es una medida de probabilidad neutrosófica.

1. **Primer axioma**

La probabilidad neutrosófica de un evento A se expresa como se muestra a continuación.

$$NP(A) = (ch(A), ch(indetermA), ch(\bar{A}))$$

Donde:

$ch(A) \geq 0,$

$ch(indetermA) \geq 0, ch(\bar{A}) \geq 0$

Para cualquier A ∈ NF; con las anotaciones de que “indetermA” significa indeterminación relacionada con el evento A, y Ā es lo opuesto evento de A (el evento antiA).

2. **Segundo axioma**

La probabilidad neutrosófica del espacio muestral se encuentra entre -0 y +3.

$$NP(v\Omega) = (\sum x \in vf!\ Ch(x), ch(indetermvf!), ch(anti\ v\Omega))$$

Donde:

$$-0 \leq \sum_{x \in vfl} h\ (x) + ch\ (indeterm_{vf_l}) + ch\ (anti\ v\Omega) \leq 3^{+}$$

La notación *indetermvf₁* significa total indeterminación, que puede ocurrir en la muestra de un espacio neutrosófico.

Para el espacio muestral completo (normalizado) clásico, *ch(anti* vfl*)= 0*, pero para espacio de muestra incompleto:

$$ch(anti\ vfl) > 0$$

3. Tercer axioma

Este axioma se ocupa de los neutrosóficos σ-aditividad:

$$NP(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) =$$

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} ch(A_j), ch\left(indeterm_{A_1 \cup A_2 \cup \ldots}\right), ch\left(\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots}\right)\right)$$

Donde:

Al, A2, ... es una secuencia contable de separación (o mutuamente excluyentes) eventos neutrosóficos.

Si relajamos el tercer axioma obtenemos una distribución de quasiprobabilidad neutrosófica.

9.13 Consecuencias de Axiomas Neutrosófico y de probabilidad

a. Monotonicidad

Si A y B son dos eventos neutrosóficos, con A ⊆ B, con:

$$NP(A) = (ch(A), ch(indeterm_A), ch(\bar{A}))$$
$$NP(B) = (ch(B), ch(indeterm_B), ch(\bar{B}))$$

Entonces;

$$ch(A) \leq ch(B)$$
$$ch(indeterm_A) \leq ch(indeterm_B)$$
$$ch(\bar{A}) \geq ch(\bar{B})$$

b. Probabilidad neutrosófica del conjunto vacío

$$NP(\emptyset) = (0, 0, 0)$$

c. ***Limitando la probabilidad neutrosófica***

$$NP(A) = (ch(A), ch(indeterm_A), ch(\bar{A}))$$

Donde:

$$0 \le ch\ (A) \le 1$$
$$0 \le ch\ (\text{indeterm}_A) \le 1$$
$$0 \le ch\ (\bar{A}) \le 1.$$

d. ***Ley de adición neutrosófica (o regla de suma neutrosófica)***

Para cualquiera de los dos eventos neutrosóficos A y B tenemos:

$$NP(A \cup B) =$$

$$\left(ch(A) + ch(B) - ch(A \cap B), ch(indeterm_{A \cup B}), ch(\overline{A \cup B})\right)$$

If $A \cap B = \emptyset$

Entonces;

$$NP(A \cup B) = \left(ch(A) + ch(B), ch(indeterm_{A \cup B}), ch(\overline{A \cup B})\right)$$

e. ***Principio de inclusión-exclusión neutrosófica***

$$NP(\nu\Omega \setminus A) = \left(ch(\nu\Omega) - ch(A), ch\left(indeterm_{\nu\Omega \setminus A}\right), ch(A)\right)$$

También;

sí A ⊆ B, entonces:

$$NP(B \setminus A) = \left(ch(B) - ch(A), ch\left(indeterm._{B \setminus A}\right), ch(\overline{B \setminus A})\right)$$

9.14 Interpretaciones de la Probabilidad Neutrosófica

La probabilidad neutrosófica también puede tener dos interpretaciones, como la probabilidad clásica:

a. Forma objetiva, o descripción del estado objetivo de los asuntos, cuya versión más

popular es la probabilidad frecuentista neutrosófica.

b. Forma subjetiva, o un grado de creencia en un evento que ocurra.

9.14.1 Ejemplo con probabilidad de frecuencia neutrosófica

Consideremos un ejemplo más concreto

Usando la Probabilidad Neutrosófica Frecuentista podemos (aproximadamente) determinar cuál es la probabilidad de que el dado se lance como indeterminado. Del mismo modo que en la probabilidad clásica, podemos usar una simulación por computadora, basada en las conexiones entre el modelo matemático neutrosófico (es decir, los modelos que involucran la indeterminación) y nuestros estadísticos neutrosóficos de la vida cotidiana pueden usar simulaciones para aproximar la probabilidad de la incertidumbre del dado en una superficie irregular específica. Con las computadoras se puede simular una gran cantidad de pruebas en poco tiempo.

Supongamos que obtenemos la posibilidad de obtener indeterminación ch(indeterm) = 0.10 para lanzar un dado regular sobre una superficie irregular. El espacio muestral neutrosófico es entonces:

$$\nu\Omega = \{1,2,3,4,5,6,\ indeterm\}$$

Entonces, la probabilidad neutrosófica de lanzar el evento A es:

$$\mathcal{NP}(A) = \left(ch(A), ch(indeterm_A), ch(\overline{A})\right)$$

Donde ch (·) sirve de “oportunidad”, y A es el evento opuesto a Ā (posibilidad de que se produzca *anti*A).

Por ejemplo:

$$\mathcal{NP}(1) = \left(ch(\{1\}), ch(indeterm_{\{1\}}), ch(\overline{\{1\}})\right)$$
$$= \left(\frac{1-0.10}{6}, 0.10, 5\cdot\frac{1-0.10}{6}\right) = (0.15, 0.10, 0.75)$$
$$= \mathcal{NP}(2) = \ldots = \mathcal{NP}(6).$$

En general

$$\mathcal{NP}\left(\overline{A}\right)=\left(ch\left(\overline{A}\right),ch\left(indeterm_{\left(\overline{A}\right)}\right),ch\left(A\right)\right)$$

Por lo tanto:

$$\mathcal{NP}\left(\bar{1}\right)=\left(ch\left(\bar{1}\right),ch\left(indeterm_{\left(\bar{1}\right)}\right),ch\left(1\right)\right)$$

$$=\left(ch\left(\{2,3,4,5,6\}\right),ch\left(indeterm_{\left(\{2,3,4,5,6\}\right)}\right),ch\left(1\right)\right)$$

$$=\left(5\left(0.15\right),0.10,0.15\right)=0.75,0.10,0.15\,.$$

También por:

$$\mathcal{NP}\left(1\ \ or\ \ 2\right)=\left(ch\left(1\ \ or\ \ 2\right),ch\left(indeterm_{\left(1\ or\ 2\right)}\right),ch\left(\overline{1\ \ or\ \ 2}\right)\right)$$

$$=\left(ch(1)+ch(2),ch\left(indeterm_{\left(1\ or\ 2\right)}\right),ch\left(\overline{1\ \ and\ \ 2}\right)\right)$$

$$=\left(01.5+0.15,0.10,ch\left(\{3,4,5,6\}\right)\right)=\left(0.30,0.10,4\cdot\left(0.15\right)\right)$$

$$=\left(0.30,0.10,0.60\right).$$

En general:

$$\mathcal{NP}\left(A\ \ or\ \ B\right)=\left(ch(A)+ch(B),ch\left(indeterm_{\left(A\ or\ B\right)}\right),ch\left(\overline{A\ \ or\ \ B}\right)\right)$$

for $A\cap B=\phi$

Para eventos neutrosóficos no exclusivos en general se tiene:

$$\mathcal{NP}\left(A\ \ or\ \ B\right)=\left(ch\left(A\ \ or\ \ B\right),ch\left(indeterm_{A\ or\ B}\right),ch\left(\overline{A\ \ or\ \ B}\right)\right)$$

$$=\left(ch\left(A\right)+ch\left(B\right)-ch\left(A\cap B\right),ch\left(indeterm\right),ch\left(\overline{A}and\,\overline{B}\right)\right)$$

De donde sí, A = {1,2,3}, B = {2,3,4,5}, entonces:

$$\mathcal{NP}(\{1,2,3\} \, or \, \{2,3,4,5\}) =$$

$$= (3(0.15)+4(0.15)-2(0.15), 0.10, ch(\{4,5,6\} \, and \, \{1,6\}))$$

$$= (0.75, 0.10, ch(\{6\})) = (0.75, 0.10, 0.15)$$

Para eventos independientes, se tiene:

$$\mathcal{NP}(A \ and \ B) = \left(ch(A \ and \ B), ch\left(indeterm_{A \ and \ B}\right), ch\left(\overline{A \ and \ B}\right)\right)$$

$$= \left(ch(A) \cdot ch(B), ch\left(indeterm_{A \ and \ B}\right), ch\left(\overline{A \ and \ B}\right)\right)$$

9.14.2 Ejemplo con probabilidad de frecuencia neutrosófica en un espacio de producto neutrosófico

Supongamos que arrojamos el dado regular anterior dos veces en una superficie irregular. En este caso se tienen dos eventos independientes. ¿Cuál es la probabilidad neutrosófica de obtener {3} en el primer lanzamiento y {4} en el segundo lanzamiento?

El primer espacio neutrosófico con posibilidades correspondientes es:

$$\nu\Omega_1 = \left\{ \begin{array}{ccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & indeterm \\ 0.15 & 0.15 & 0.15 & 0.15 & 0.15 & 0.15 & 0.10 \end{array} \right\}$$

El segundo espacio neutrosófico con sus correspondientes posibilidades es:

$$\nu\Omega_2 = \left\{ \begin{array}{ccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & indeterm \\ 0.15 & 0.15 & 0.15 & 0.15 & 0.15 & 0.15 & 0.10 \end{array} \right\}$$

De donde se construye su espacio de producto neutrosófico:

$$\begin{cases}(1,1),(1,2),\ldots,(1,6) & (1,\mathrm{I}),(2,\mathrm{I}),\ldots,(6,\mathrm{I}) \quad (\mathrm{I},\mathrm{I}) \\ (1,1),(1,2),\ldots,(1,6) & (\mathrm{I},1),(\mathrm{I},2),\ldots,(\mathrm{I},6)\end{cases}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(6,1),(6,2),\ldots,(6,6)$$

Donde: I = indeterminación con las posibilidades correspondientes:

$$\begin{cases}0.0225, 0.0225, \ldots, 0.0225 & 0.0150, 0.0150, \ldots, 0.0150 \quad 0.0100 \\ 0.0225, 0.0225, \ldots, 0.0225 & 0.0150, 0.0150, \ldots, 0.0150\end{cases}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$0.0225, 0.0225, \ldots, 0.0225$$

Por lo tanto;

$$ch(\{3\} \, and \, \{4\}) = 0.15(0.15) = 0.00225\,;$$

$$ch\left(indeterm_{\{3\} \ or \ \{4\}}\right) = 12(0.0150) + 0.0100 = 0.1800 + 0.0100$$
$$= 0.1900;$$

$$ch\left(\overline{\{3\} \, and \, \{4\}}\right) =$$
$$= \left(ch\left(\overline{\{3\}} \wedge \nu\Omega_2\right), \nu\Omega_1 \wedge \overline{\{4\}}, \{3\} \wedge \{1,2,3,5,6\}, \{1,2,4,5,6\} \wedge \{4\}\right)$$
$$= 35(0.0225) = 0.7875$$

$$\mathcal{NP}(\{3\} \, and \, \{4\}) = (0.0225, 0.1900, 0.7875)$$

Se ha considerado que (1, I), ..., (6, I), (I, 1), ..., (I, 6) son indeterminaciones, mientras que (I, I) obviamente es una doble indeterminación.

9.14.3 Ejemplo con doble indeterminación

Cambiamos de nuevo el equipamiento teórico en lugar de un dado en estado normal, consideramos ahora un dado defectuoso en el sentido de que dos de sus caras tienen la impresión borrada, por ejemplo, las caras borradas son {5} y {6}. El nuevo espacio de probabilidad neutrosófica es:

$$v\Omega = \{1,2,3,4, indeterm_d, indeterm_s\}$$

Con dos tipos de indeterminaciones: una debido al dado físico, denotado por *indeterm*$_d$, y el segundo debido al espacio físico, denotado por *indeterm*$_s$.

Consideramos que la probabilidad de *indeterm*$_s$ es la misma que en los ejemplos frecuentistas anteriores: ch (*indeterm*$_s$) = 0.10, ch (1) = ... = ch (4) = 0.15.

A partir de las dos impresiones que se muestran en las caras borradas del dado, se obtiene entonces; ch (*indeterm*$_d$) = 2 (0.15) = 0.30.

Así;

$$ch\left(total \quad indeterm\right) = ch\left(indeterm_s\right) + ch\left(indeterm_d\right)$$
$$= 0.10 + 0.30 = 0.40,$$

De dónde:

$$\mathcal{NP}(1) = \ldots = \mathcal{NP}(4) = (0.15, 0.40, 0.45)$$

Este experimento neutrosófico es equivalente al experimento de tener un dado perfecto con cuatro caras (un tetraedro), que se lanza sobre una superficie irregular donde existe la posibilidad de indeterminación (para que el dado se atasque en uno de sus seis bordes o en uno de sus cuatro vértices) es 0.40.

Por lo tanto:

$$v\Omega = \{1,2,3,4, indeterm\}$$

9.14.4 Ejemplo de suma de posibilidades en un Evento

En probabilidad clásica: si A es un evento, entonces P(A) es la suma de las probabilidades de todos los resultados en el conjunto.

En probabilidad neutrosófica, es similar si:

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

NP (A) = (suma de posibilidades de todos los resultados en el conjunto A, ch (*indeterm*$_A$),

ch ($\bar{A}$)) =

$$\left(\sum_{j=1}^{n} ch(a_j), ch(indeterm_A), ch(\bar{A})\right)$$

Por ejemplo, si retomamos uno de los experimentos previos de un dado regular arrojado sobre una superficie irregular, donde la probabilidad de indeterminación es 0.10, entonces:

$$NP(\{1,2,3\})$$

$$= \left(ch\{1,2,3\}, ch\left(indeterm_{\{1,2,3\}}\right), ch(\{\overline{1,2,3}\})\right)$$

$$= \left(ch(1) + ch(2) + ch(3), ch\left(indeterm_{\{1,2,3\}}\right), ch(\{4,5,6\})\right)$$

$$= (0.15 + 0.15 + 0.15, 0.10, ch(4) + ch(5) + ch(6)$$

$$= (0.45, 0.10, 0.45)$$

ya que, NP (1) = *NP* (2) = *NP* (3) = (0.15, 0.10, 0.75).

9.15 Probabilidades Neutrosóficas Paraconsistente

La probabilidad neutrosófica paraconsistente tiene la propiedad de que la suma de sus componentes es estrictamente mayor que 1.

$$t + i + f \,?\, (1, 3^{+} [$$

Por lo que en este tipo [o de probabilidad neutrosófica, existe contradicciones entre las posibilidades.

Al pronosticar un evento a partir de diferentes criterios, podemos obtener diferentes posibilidades de ocurrencia.

Por ejemplo, supongamos que dos equipos de balonmano G y H competirán en un juego la próxima semana.

a. De acuerdo con la historia de sus disputas anteriores, el equipo G es 60% favorable para ganar.

b. Pero, de acuerdo con sus últimos juegos en la temporada actual frente a otros equipos de balonmano, H está mostrando un mejor desempeño que G, y los expertos

concluyen sobre este criterio que H tiene un 70% de posibilidades de ganar.

c. Otros creen que, dado que G fue a menudo mejor que H, pero en esta temporada H jugó mejor que G, como una compensación, es 10% más probable que su juego sea indeciso (empate).

Por lo tanto, NP (G gana sobre H) = (0.6, 0.1, 0.7), con 0.6 + 0.1 + 0.7> 1.

9.16 Probabilidades Neutrosófica incompletas

La probabilidad neutrosófica incompleta tiene la propiedad de que la suma de sus componentes es estrictamente menor que 1.

$$t+i+f\ ?\ ]^{-}\ 0,1)$$

Por lo tanto, existe información incompleta.

Reconsiderando el ejemplo anterior sobre dos equipos de balonmano H y G que competirán en un juego la próxima semana.

a. Si ambos equipos tienen un rendimiento débil en la temporada actual y de valores casi iguales, entonces cada uno tendrá una pequeña posibilidad de ganar con un 20%.
b. Al estudiar el bajo número de sus juegos anteriores cuando los resultados fueron empatados, los expertos en balonmano concluyen que es una pequeña posibilidad de que el 30% tenga un juego empatado.

Por lo tanto, NP (G gana sobre H) = (0.2, 0.3, 0.2), con 0.2 + 0.3 + 0.2 <1.

9.17 Evento Neutrosófico Mutuamente Exclusivo

En probabilidad clásica, si A y B son eventos mutuamente excluyentes (independientes), entonces:

$$P(A\ or\ B) = P(A) + P(B)$$

En probabilidad neutrosófica, tenemos propiedades similares para eventos mutuamente exclusivos:

$$NP(A\ or\ B) = \left(ch(A) + ch(B), ch(indeterm_{A\ or\ B}), ch\left(\overline{A\ or\ B}\right)\right)$$

En la probabilidad clásica para eventos no excluyentes entre sí, A y B tienen:

$$P(A\ or\ B) = P(A) + P(B) - P(A\ and\ B)$$

En probabilidad neutrosófica para eventos neutrosóficos no mutuamente excluyentes, se tiene similarmente:

$$NP(A \text{ or } B) = \left(ch(A) + ch(B) - ch(A \text{ and } B), ch(indeterm_{A\ or\ B}), ch(\overline{A \text{ or } B})\right)$$

Por ejemplo, consideremos un mazo de 52 cartas, pero de modo que 2 de ellas estén deterioradas y no se puedan leer. Dibujemos al azar una sola carta. ¿Cuál es la probabilidad neutrosófica de obtener una carta de cara (evento A) o una carta de corazón (evento B)? Sabemos que ninguna de las cartas de cara y corazón se deterioraron. Hay 12 cartas de cara (cuatro tipos de cada una de J, Q y K), 13 cartas de corazón y 3 cartas de cara y corazón.

$$NP(A\ or\ B) = (ch(A\ or\ B), ch(indeterm_{A\ or\ B}), ch(\overline{A\ or\ B})) = (ch(A) + ch(B) - ch\ (A\ and\ B), ch(indeterm_{A\ or\ B}), ch\ (\bar{A}\ and\ \bar{B})) = \left(\frac{12}{52} + \frac{13}{52} - \frac{3}{52}, \frac{2}{52}, \frac{52-12-13+3-2}{52}\right) = \left(\frac{22}{52}, \frac{2}{52}, \frac{28}{52}\right)$$

Por supuesto,

$$NP(A) = \left(\frac{12}{52}, \frac{2}{52}, \frac{38}{52}\right),$$

$$NP(B) = \left(\frac{13}{52}, \frac{2}{52}, \frac{37}{52}\right),$$

$$NP(A \; and \; B) = \left(\frac{3}{52}, \frac{2}{52}, \frac{47}{52}\right)$$

No simplificamos las fracciones porque podemos comparar mejor estas probabilidades neutrosóficas si dejamos el mismo denominador para todas ellas.

Pero digamos que no sabemos si alguna de las dos tarjetas borradas se encuentra entre las de cara o corazón. Entonces:

$$NP(A) = \left(\left[\frac{10}{52}, \frac{12}{52}\right], \frac{2}{52}, \left[\frac{38}{52}, \frac{40}{52}\right]\right)$$

De dónde:

$$NP(A \text{ or } B) = \left(\left[\frac{18}{52}, \frac{24}{52}\right], \frac{2}{52}, \left[\frac{26}{52}, \frac{32}{52}\right]\right)$$

$NP(B) = \left(\left[\frac{11}{52}, \frac{13}{52}\right], \frac{2}{52}, \left[\frac{37}{52}, \frac{39}{52}\right]\right)$ Porque:

$$ch(A \text{ or } B) =$$

$$NP(A \text{ and } B) = \left(\left[\frac{1}{52}, \frac{3}{52}\right], \frac{2}{52}, \left[\frac{47}{52}, \frac{49}{52}\right]\right)$$

$$= \left[\frac{10}{52}, \frac{12}{52}\right] + \left[\frac{11}{52}, \frac{13}{52}\right] - \left[\frac{1}{52}, \frac{3}{52}\right]$$

$$= \left[\frac{21}{52}, \frac{25}{52}\right] - \left[\frac{1}{52}, \frac{3}{52}\right]$$

$$= \left[\frac{21-3}{52}, \frac{25-1}{52}\right] = \left[\frac{18}{52}, \frac{24}{52}\right]$$

and $ch(\overline{A \text{ or } B}) =$

= ch (espacio de probabilidad neutrosofía total) – ch (*indeterm*) – ch (A o B)

$$= 1 - \frac{2}{52} - \left[\frac{16}{52}, \frac{24}{52}\right] = \frac{50}{52} - \left[\frac{18}{52}, \frac{24}{52}\right] = \left[\frac{26}{52}, \frac{32}{52}\right]$$

9.18 Regla bayesiana neutrosófica

En probabilidad clásica, la Regla Bayesiana es:

$$P(A|B) = P(B|A)\frac{P(A)}{P(B)}$$

Examinemos la versión neutrosófica de esta regla.

Supongamos que tenemos una urna con 5 votos A, 2 votos indeterminados (no claros, borrados) y 3 votos B. Si A es el evento de extraer un voto A de la urna, y B el evento de extraer un voto B de la urna, entonces:

$$NP(A) = \left(\frac{5}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}\right), NP(B) = \left(\frac{3}{10}, \frac{2}{10}, \frac{5}{10}\right)$$

Si se ha tomado un voto B de la urna, entonces:

$$NP(A|B) = \left(\frac{5}{9}, \frac{2}{9}, \frac{2}{9}\right)$$

Pero si uno de los votos A ha sido tomado de la urna, entonces:

$$NP(B|A) = \left(\frac{3}{9}, \frac{2}{9}, \frac{4}{9}\right)$$

En general, la regla bayesiana neutrosófica es:

$$= \left(ch(B|A)\frac{ch(A)}{ch(B)}, ch(indeterm_{A} \mid B), ch\ (\bar{A}|B)\right)$$

Por lo tanto, como en la probabilidad clásica la regla de Bayes queda como se muestra en a continuación.

$$ch(A|B) = ch(B|A)\frac{ch(A)}{ch(B)}$$

Un ejemplo particular, es:

$$NP(A|B) =$$
$$= \left(ch(B|A)\frac{ch(A)}{ch(B)}, ch(indeterm_A|B), ch(\bar{A}|B)\right)$$
$$= \left(\frac{3}{9}\times\frac{\frac{5}{10}}{\frac{3}{10}}, \quad \frac{2}{9}, \quad ch(B|B)\right)$$
$$= \left(\frac{5}{9}, \frac{2}{9}, \frac{2}{9}\right)$$

9.18.1 Regla de multiplicación en Redes Bayesianas neutrosófica

En probabilidad clásica, la Regla de multiplicación de probabilidades equivalente a la Probabilidad condicional es:

$$P\ (A\ y\ B)\ =\ P\ (A)\ \cdot\ P\ (B\ dado\ A)$$

La Regla de Multiplicación para Probabilidades Neutrosóficas es:

NP (A y B) = (ch (A) · ch (B dado A),
ch (indetermA y B) + ch (indetermA o B | A) –
ch (indetermA y B) · ch (indetermA y B | A),
ch (A) · ch (A dado A) + ch (B) · ch (A dado B) +
ch (B) · ch (B dado B)),

porque:

ch (indeterm para (A y B)) =
= ch (indeterm) · ch (indeterm | A)
+ ch (indeterm) · ch (A | A)
+ ch (indeterm) · ch (B | A)
+ ch (indeterm | A) · ch (A)
+ ch (indeterm | A) · ch (B)
= ch (indeterm | A)

· [c_𝘩 (en d e ter m) + c𝘩 (A) + c𝘩 (B,)]
+ c𝘩 (indeterm)
· [c_𝘩 (A | A) + c𝘩 (B | A) + c𝘩 (i nd e t e rm | A,)
- c𝘩 (indeterm | A)]
= c𝘩 (indeterm) + c𝘩 (indeterm | A)
- c𝘩 (indeterm) · c𝘩 (indeterm | A),

debido a los hechos que**,**

$$\Lambda \left[\underbrace{ch(indeterm) + ch(A) + ch(B)}\right] = 1 \; (\bar{A}|B))$$

$$\text{and} \left[\underbrace{ch(A|A) + ch(B|A) + ch(indeterm|A)}\right] = 1$$

Considerando el ejemplo neutrosófico anterior:

$$\underset{A - votes}{5} \quad \underset{indeterm - votes}{2} \quad \underset{B - votes}{3}$$

Se escoge dos votos sucesivos sin reemplazo.

Supongamos que A es el evento de que el primero es un voto A, y B es un voto B.

Tenemos:

$$ch(A) = \frac{5}{10}, ch(indeterm) = \frac{2}{10},$$
$$ch(B) = \frac{3}{10}, ch(A|A) = \frac{4}{9},$$
$$ch(indeterm|A) = \frac{2}{9}, ch(B|A) = \frac{3}{9},$$
$$ch(A|B) = \frac{5}{4}, ch(B|B) = \frac{2}{9},$$

De dónde:

$$NP(A \; and \; B) = \left(\frac{5}{10}\cdot\frac{3}{9}, \frac{2}{10}+\frac{2}{9}-\frac{2}{10}\cdot\frac{2}{9}, \frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}+\frac{3}{10}\cdot\frac{5}{9}+\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}\right) = \left(\frac{15}{90}, \frac{34}{90}, \frac{41}{90}\right)$$

9.18.2 Negación Neutrosófica (o Probabilidad Neutrosófica de Eventos Complementarios)

Para cualquier evento A diferente de la indeterminación, del espacio muestral X, uno tiene:

$$NP\,(A) \;=\; (ch\,(A), ch\,(indetermA), ch\,(antiA))$$

Por lo que la probabilidad neutrosófica del complemento de A, señalada como antiA es:

$$NP(\, C(A)\,) = NP(\, antiA\,) = (\, ch(antiA), ch(indeterm_{antiA}),$$

$$ch(\, anti(antiA)\,) = (\, ch(X)\text{-}ch(A), ch(indeterm_{antiA}), ch(A)\,)$$

9.18.3 Doble Negación Neutrosófica

En probabilidad clásica,

$$P(anti(antiA)) \;=\; P(A)$$

En probabilidad neutrosófica, para A un evento diferente de la indeterminación:

$$NP(A) \;=\; (ch(A), ch(indetermA), ch(antiA))$$

Entonces:

$$\begin{aligned} NP(antiA) &= (ch(antiA), ch(indetermantiA), ch(anti(antiA))) \\ &= (ch(antiA), ch(indetermantiA), ch(A)) \end{aligned}$$

De dónde:

$$NP(anti(antiA)\,) \;=\; (\,ch(anti(antiA)), ch(indetermanti(antiA)), ch(antiA)) \;=\; (ch(A), ch(indetermA), ch(antiA)) \;=\; NP(A)$$

Reconsiderando el ejemplo anterior sobre una urna con:

$$\begin{array}{ccc} 5 & 2 & 3 \\ A - votes & indeterm - votes & B - votes \end{array}$$

$$NP(A) \ = \ (5/10, 2/10, 3/10)$$

Entonces:

NP (antiA) = (3/10, 2/10, 5/10), y se deduce que NP (anti (antiA)) = (5/10, 2/10, 3/10) = NP (A).

9.19 Valor esperado neutrosófico

Consideremos un espacio de probabilidad discreta neutrosófico X con los resultados determinados *x1, x2,…, xr* y sus respectivas posibilidades de ocurrir *p1, p2,…, pr*, y con indeterminaciones $indeterm_1$, $indeterm_2$,…, $indeterm_k$, luego el Valor Esperado Neutrosófico (NE) es:

$$NE = \sum_{j=1}^{r} n_j p_j + \sum_{k=1}^{s} (m_k \cdot \mathrm{ch}(indeterm_k))$$

Donde; nj es el posible resultado numérico para la probabilidad correspondiente *pj*, para todos *j*, y *mk* es el posible resultado numérico para la probabilidad correspondiente que Ocurre *indetermk*, para todo *k*.

Si reconsideramos el ejemplo neutrosófico anterior:

$$\begin{array}{ccc} 5 & 2 & 3 \\ A - votes & indeterm - votes & B - votes \end{array}$$

Y los resultados numéricos para extraer un voto A es perder \$ 2.00, para extraer un voto B es ganar \$ 3.00, mientras que para extraer un voto indeterminado es perder \$ 1.00. ¿Cuál es el valor esperado neutrosófico?

NE = -2×(5/10) + 3×(3/10) – 1×(2/10) = -\$0.30.

9.20 Cadena de Markov neutrosófica

Es una generalización neutrosófica directa de la cadena de Markov clásica, es decir, se toma en cuenta alguna indeterminación en el espacio de probabilidad clásico.

La cadena de Markov neutrosófica es una secuencia de variables aleatorias neutrosóficas X1, X2, ..., con la propiedad de que el siguiente estado neutrosófico depende solo del estado neutrosófico actual:

$$NP(X_n = x|X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}) = NP(X_n = x|X_{n-1} = x_{n-1}).$$

Es un sistema matemático neutrosófico que se caracteriza por no tener memoria. Una transición neutrosófica es un cambio del estado de un sistema con indeterminación.

Una cadena de Markov neutrosófica de orden m, donde 1 ≤ m <∞, o cadena de Markov neutrosófica con memoria m, es:

$$NP(X_n = x|X_{n-1} = x_{n-1}, X_{n-2} = x_{n-2}, \dots, X_1 = x_1) =$$
$$= NP(X_n = x|X_{n-1} = x_{n-1}, X_{n-2} = x_{n-2}, \dots, X_{n-m} = x_{n-m}).$$

Definimos anteriormente la cadena de Markov neutrosófica para el tiempo discreto. Para un tiempo continuo, utilizamos un índice continuo tal y como se muestra en la siguiente ecuación.

$$NP(X_n = x|X_{n-1} = y) = NP(X_{n-1} = x|X_{n-2} = y), \text{ for all } n.$$

Para ilustrar un ejemplo sobre una cadena de Markov neutrosófica discreta, usamos un gráfico de probabilidad neutrosófico (esto debe distinguirse del gráfico neutrosófico y el gráfico difuso neutrosófico, ambos presentados por W.B. Vasantha Kandasamy & F. Smarandache en nuestros libros de estructura algebraica desde el año 2003).

Consideremos la economía mundial y sus estados: prosperidad económica (P), recesión económica (R) y depresión económica (D).

Supongamos que tenemos el gráfico neutrosófico de la ilustración 209, que representa la probabilidad neutrosófica, durante un año de un proceso económico:

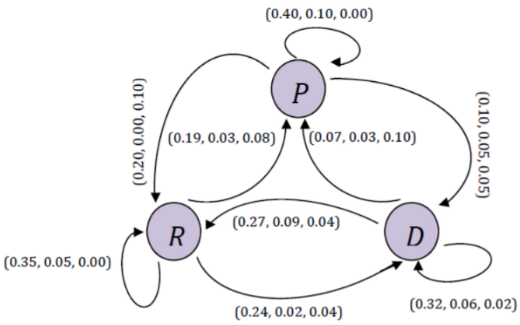


Ilustración 209

Sobre la cifra, un año de prosperidad económica es seguido por otro año de prosperidad económica el 40% del tiempo, mientras que el 10% del tiempo es desconocido, un año de recesión económica el 20% del tiempo, mientras que el 10% del tiempo no se sigue por una recesión económica y un año de depresión económica el 10% del tiempo y el 5% del tiempo se desconoce, mientras que el 5% del tiempo no es seguido por un año de recesión económica.

La matriz de transición neutrosófica de este gráfico es:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} P & R & D \end{array} \\ NP = \begin{array}{c} P \\ R \\ D \end{array} & \begin{bmatrix} (0.40, 0.10, 0.00) & (0.20, 0.00, 0.10) & (0.10, 0.05, 0.05) \\ (0.19, 0.03, 0.08) & (0.35, 0.05, 0.00) & (0.24, 0.03, 0.04) \\ (0.07, 0.03, 0.10 & (0.27, 0.09, 0.04) & (0.32, 0.06, 0.02) \end{bmatrix} \end{array}$$

El espacio de estado es {P, R, D}.

Los vectores de la fila estocástica son:

$$\begin{aligned} P &= [1 \quad 0 \quad 0], \\ R &= [0 \quad 1 \quad 0], \\ D &= [0 \quad 0 \quad 1]. \end{aligned}$$

Sea X cualquiera de estos vectores de fila estocásticos, con la relación neutrosófica

$$X^{(n+1)} = X^{(n)} NP$$

Para cualquier *momento n*.

De dónde:

$$X^{(n+2)} = X^{(n+1)}NP$$
$$= \left[X^{(n)}NP\right]NP$$

Por tanto, la multiplicación de probabilidades neutrosóficas queda como:

$$(a_1, b_1, c_1) \cdot (a_2, b_2, c_2) = (a_1 a_2, max\{b_1, b_2\}, max\{c_1, c_2\}),$$

$$(a_1, b_1, c_1) + (a_2, b_2, c_2) = (a_1 + a_2, min\{b_1, b_2\}, min\{c_1, c_2\}).$$

9.21 Aplicaciones de los neutrosóficos

La neutrosofía es aplicada en las ciencias física, en la estadística, en los mercados financieros, en la gestión de riesgos, en la biología, en la matemática, en la teoría cuántica y en casi cualquier campo humanístico o científico donde la indeterminación, la incógnita y en general donde <neutA> (neutralidad con respecto a un elemento <A >) Ocurre.

Bibliografía

[1] L.A. Zadeh. Fuzzy set. *Information and Control*, 8:338–353, 1965. [2] L.A. Zadeh. Outline of a new approach to the analysis of complex system. *IEEE Transaction on System Man and Cybernetics*, 1:28– 44, 1973.

[3] L.A. Zadeh. The concept of a linguistic variable and its applica- tions to approximate reasoning. part i, ii, iii. *Information Science*,

Bibliografía

Kandasamy, W. B. V., & Smarandache, F. (2003). *Fuzzy cognitive maps and neutrosophic cognitive maps*: American Research Press.

Kandasamy, W. V., & Smarandache, F. (2013). *Fuzzy Neutrosophic Models for Social Scientists*: Education Publisher Inc.

Leyva-Vázquez, M., Hernandez, N. B., & Smarandache, F. (2018). *Métodos multicriterios para determinación de la efectividad de la gestión pública y el análisis de la transparencia.*: Pons Publishing House.

Leyva-Vázquez, M., Pérez-Teruel, K., Febles-Estrada, A., & Gulín-González, J. (2013). Técnicas para la representación del conocimiento causal: un estudio de caso en Informática Médica. *Revista Cubana de información en ciencias de la salud, 24*(1), 73-83.

Leyva-Vázquez, M., Santos-Baquerizo, E., Peña-González, M., Cevallos-Torres, L., & Guijarro-Rodríguez, A. (2016). *The Extended Hierarchical Linguistic Model in Fuzzy Cognitive Maps.* Paper presented at the Technologies and Innovation: Second International Conference, CITI 2016, Guayaquil, Ecuador, November 23-25, 2016, Proceedings 2.

Leyva-Vázquez, M., & Smarandache, F. (2018). Inteligencia Artificial: retos, perspectivas y papel de la Neutrosofía. *Dilemas Contemporáneos: Educación, Política y Valores*.

Meurer, A., Smith, C. P., Paprocki, M., Čertík, O., Kirpichev, S. B., Rocklin, M., . . . Singh, S. (2017). SymPy: symbolic computing in Python. *PeerJ Computer Science, 3*, e103.

Salmerona, J. L., & Smarandacheb, F. (2010). Redesigning Decision Matrix Method with an indeterminacy-based inference process. *Multispace and Multistructure. Neutrosophic Transdisciplinarity (100 Collected Papers of Sciences), 4*, 151.

Smarandache, F. (2005). *A unifying field in logics: neutrosophic logic. Neutrosophy, neutrosophic set, neutrosophic probability and statistics.*: American Research Press.

Smarandache, F. (2014). *Introduction to neutrosophic statistics*: Infinite Study.

Enfoque didactico de la teoría de conjuntos y probabilidades

MSc. Lorenzo Jovanny Cevallos Torres
Máster en Gestión de la Productividad y la Calidad (Aplicación a la Estadística de Procesos) y en Modelado Computacional en Ingeniería. Cursa además la maestría en Estadística Aplicada. Ingeniero en Estadística Aplicada - Informática. Es docente investigador en la Universidad de Guayaquil, Ecuador. Ha tutorado varias tesis de grado y realizado diversas publicaciones en revistas indexado en sitios de alto impacto.

MSc. Jorge Luis Zambrano Santana
Máster en Contabilidad Internacional, Diplomado en Docencia Superior e Ingeniero Comercial. Ha publicado diversos artículos científicos. Actualmente es docente coordinador del área de Contabilidad en la Facultad de Ciencias Matemáticas y Físicas, en la Universidad de Guayaquil.

MSc. Wilber Ortíz Aguilar
Máster en Ciencias de la Educación. Licenciado en Educación, especialidad Matemáticas-Computación. Posee amplia superación en el área de las matemáticas, la informática y la didáctica. Ha publicado diversos artículos científicos. Actualmente imparte Matemática en la carrera Ingeniería en Networking y Telecomunicaciones, Facultad de Ciencias Matemáticas y Físicas, Universidad de Guayaquil.

PhD. Maikel Yelandi Leyva Vázquez.
Doctor en Ciencias Técnicas, Máster en Bioinformática e Ingeniero Informático. Es docente investigador de la Universidad de Guayaquil, Facultad de Ciencias Matemáticas y Físicas. Ha tutorado varias tesis de grado, posgrado y realizado diversas publicaciones en revistas indexadas en sitios de alto impacto. Es editor de las revistas Neutrosophic Sets and Sistems y Neutrosophic Computing and Machine Learning.

Lcda. **Yudelnabis La O Mendoza**
Aspirante a Doctora Ciencias Pedagógicas y Especialidad Psicopedagogía, Docente del área de Contabilidad y Finanzas en el Instituto Politécnico de Economía ¨José Martí Pérez¨ La Habana, Cuba. Posee diversas publicaciones en revistas indexadas, ha participado como ponente en diversos eventos científicos realizados en Cuba.

PhD. Florentin Smarandache
Doctor en Matemáticas y Posdoctoral en Matemáticas Aplicadas, Máster en Matemáticas y Ciencia de la Computación, y Licenciado en Matemáticas. Docente de la Universidad de Nuevo México. USA. Creador de la Neutrosofía y Presidente de la Asociación Internacional de Ciencias Neutrosóficas, Editor de la revista Neutrosophic Set and Systems